



COPPE/UFRJ

ESTUDO DA QUEBRA DE LEITOS DE PARTÍCULAS APLICADO À
MODELAGEM GENERALIZADA DA COMINUIÇÃO

Gabriel Kamilo Pantoja Barrios

Dissertação de tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Rio de Janeiro

Março de 2010

ESTUDO DA QUEBRA DE LEITOS DE PARTÍCULAS APLICADO À
MODELAGEM GENERALIZADA DA COMINUIÇÃO

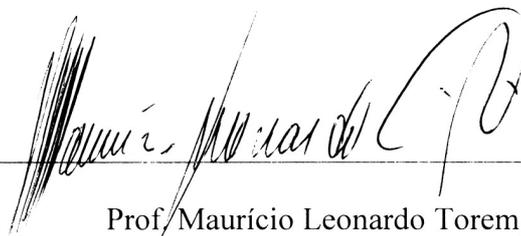
Gabriel Kamilo Pantoja Barrios

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS.

Examinada por:



Prof. Luís Marcelo Marques Tavares, Ph.D.



Prof. Maurício Leonardo Torem, D.Sc.



Prof. José da Rocha Miranda Pontes, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2010

Barrios, Gabriel Kamilo Pantoja

Estudo da quebra de leitos de partículas aplicado à Modelagem Generalizada da Cominuição/ Gabriel Kamilo Pantoja Barrios. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XIX, 108 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, 2010.

Referencias Bibliográficas: p. 105-108.

1. Quebra de leitos de partículas 2. Modelagem matemática. 3. Cominuição. I. Tavares, Luís Marcelo Marques. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador o Professor Luís Marcelo Tavares, por todo o conhecimento e a ajuda que tem sido muito importante para a conclusão da minha dissertação de mestrado e minha formação profissional.

Agradeço à Universidade Federal do Rio de Janeiro, principalmente ao Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais e ao Laboratório de Tecnologia Mineral, por permitir-me aprender e compartilhar muitos conhecimentos acadêmicos importantes.

Agradeço à minha família, minha mãe Ana, meu pai Freddy e meu irmão Sebastian. Eles me apoiaram e foram o principal motivo para começar e terminar bem o mestrado.

Agradeço aos meus amigos Juan, Victor, Moema, Monique, Alejandra, Rodrigo, Tatiana, Sarah, Jeremias, Yemcy e Yanneth que com seu carinho e paciência contribuíram significativamente neste trabalho. Também quero agradecer especialmente à Evorah por ser minha companheira nos momentos bons e não tão bons e ter que lidar comigo nestes dois anos.

Agradeço ao CNPq, CAPES, AMIRA e VALE pelo financiamento da pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DA QUEBRA DE LEITOS DE PARTÍCULAS APLICADO À
MODELAGEM GENERALIZADA DA COMINIUÇÃO

Gabriel Kamilo Pantoja Barrios

Março/2010

Orientadores: Luís Marcelo Marques Tavares

Programa: Engenharia Metalúrgica e de Materiais

O presente trabalho estuda a quebra de leitos de partículas por impacto com uma bola de aço em queda livre em condições similares às encontradas dentro de um moinho de bolas. A influência do tamanho de partícula, da energia do impacto, do diâmetro da bola e da configuração do leito foi testada na quebra de leitos de diferentes materiais, com o objetivo de propor um modelo matemático para descrever as influências de todas essas variáveis. O destaque do modelo desenvolvido é que ele permite prever a quebra de leitos não-confinados de partículas, combinando dados de quebra de partículas individuais e funções que descrevem a repartição da energia de impacto e o volume de partículas capturadas no leito. O modelo foi calibrado e validado usando dados de fragmentação de amostras de quartzo, calcário, minério de ferro e minério de cobre, tendo o modelo mostrado boa aderência aos dados experimentais.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INVESTIGATION OF BED PARTICLE BREAKAGE APPLIED TO THE
GENERALIZED MODELING OF COMMINUTION

Gabriel Kamilo Pantoja Barrios

March/2010

Advisor: Luís Marcelo Marques Tavares

Department: Metallurgical and Materials Engineering

The present work investigates breakage of particle beds impacted by a falling steel ball in unconstrained conditions, such as those found in tumbling ball mills. The influences of particle size, impact energy, ball size and bed configuration are investigated for selected materials and a mathematical model is proposed that describes the influences of all these variables. The key element of this model is that it allows predicting breakage in unconfined particle beds with a combination of single-particle breakage data and functions that describe energy partition and volume captured in a particle bed. This model has been calibrated and validated with data from samples of quartz, an iron ore and a copper ore with very good agreement.

SUMARIO

Agradecimentos	iv
Índice de Figuras	ix
Índice de Tabelas	xvi
Lista de simbolos	xvii
I. Introdução	1
II. Revisão bibliográfica	5
II.1 Modelagem matemática de moinhos de bolas	5
II.2 Modelagem empírica.....	6
II.2.1 Método de escalonamento de moinhos de bolas de Bond	9
II.2.1.1 Ensaio de moabilidade padronizado	10
II.2.1.2 Cálculo do índice de trabalho W_i	10
II.2.1.3 Escalonamento a moinhos de dimensões maiores	10
II.2.1.4 Correção para diferentes tipos de operação dos moinhos	11
II.2.1.5 Cálculo da energia específica	11
II.2.1.6 Cálculo da potência para movimentar os corpos moedores	11
II.2.1.7 Procedimento de cálculo	12
II.3 Modelagem fenomenológica	12
II.3.1 Função seleção ou taxa específica de quebra	13
II.3.1.1 Modelo do Austin para a função seleção	14
II.3.2 Função quebra	15
II.3.2.1 Modelo empírico da função quebra	16
II.3.2.2 Balanço de massa por classes para a moagem descontínua	18
II.3.2.3 Balanço de massa por classes para a moagem contínua	19
II.3.3 Escalonamento de moinhos usando a função seleção de Austin	21
II.3.4 Escalonamento usando o modelo de Herbst e Fuerstenau para a taxa específica de quebra.....	24
II.4 Modelagem mecanicista.....	25
II.4.1 Mecanismos de quebra na redução de partículas	26
II.4.2 Modelo de moagem em função do espectro de energias de impacto	28

II.4.3	Modelagem de quebra de leitos de partículas.....	31
II.4.4	Modelagem em microescala.....	40
II.4.4.1	Mecânica do dano.....	41
II.4.4.2	Modelo da função quebra baseado na energia de impacto.....	43
II.4.4.3	Modelagem generalizada da cominuição.....	46
III.	Metodologia.....	50
III.1	Caracterização de partículas individuais.....	50
III.1.1	Ensaio de caracterização da energia de fratura.....	51
III.1.2	Ensaio de fragmentação de partículas.....	53
III.2	Caracterização de partículas em leitos.....	54
III.2.1	Captura de partículas.....	54
III.2.2	Impressão de leitos.....	56
III.2.3	Quebra de leitos por impacto com barra.....	57
III.2.4	Quebra de leitos por impacto com bola.....	58
III.3	Simulação com EDEM.....	61
IV.	Resultados e discussão.....	65
IV.1	Caracterização de partículas individuais.....	65
IV.1.1	Medidas de distribuições de energias de fratura.....	65
IV.1.2	Ensaio de fragmentação de partículas.....	67
IV.2	Caracterização de partículas em leitos.....	70
IV.2.1	Quebra de leitos por impacto com barra.....	70
IV.3	Impressão de leitos.....	74
IV.4	Simulação com EDEM.....	77
IV.5	Quebra de leitos monocamada.....	79
IV.5.1	Ensaio de quebra de leitos com bola.....	79
IV.5.2	Modelo matemático da quebra de leitos em monocamada.....	84
V.	Conclusões.....	103
VI.	Referencias bibliográficas.....	105

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura II-1. Ajuste do modelo de Austin para dados experimentais da função seleção de minério de cobre.....	14
Figura II-2. Distribuição de tamanhos de um material monotamanho depois da fratura primária.	16
Figura II-3. Modelo da função quebra para a distribuição acumulada da fratura primaria das partículas na faixa de 2,8 x 2,0 mm de amostra de minério de cobre.	17
Figura II-4. Esquema do moinho contínuo perfeitamente misturado.....	19
Figura II-5. Esquema de um moinho de bolas em estado estacionário, com a representação dos parâmetros geométricos usados no escalonamento (King, 2001).....	22
Figura II-6. Comparação do movimento da carga de corpos moedores no interior de um moinho operando a 70% da velocidade critica com enchimento de 20%, na esquerda se tem o experimento no laboratório e na direita a simulação por DEM (Rajamani et al., 2000).....	29
Figura II-7. Espectro de energias de impacto de moinho de bolas de 30 cm de diâmetro com corpos moedores de 25 mm, grau de enchimento de 30 %, operando a 54 rpm (Tavares e Carvalho, 2009).....	29
Figura II-8. Fenômeno de moagem no interior de um moinho de bolas interpretado em termos de colisões (Datta, 1998).	31
Figura II-9. Classificação dos leitos de partículas segundo Schönert: a) partícula individual, b) monocamada (camada de uma partícula), c) leito de partículas e d) leito de partículas ideal.	32
Figura II-10. Esquema do impacto de um corpo moedor sobre um leito de partículas.....	33
Figura II-11. Arranjo hexagonal densamente empacotado de uma monocamada de partículas (Bourgeois, 1993).	34
Figura II-12. Geometria de interseção entre o corpo moedor esférico e as partículas do leito, a razão de diâmetro entre a bola e as partículas é de 1:20 (Bourgeois, 1993).	35
Figura II-13. Colisão entre duas partículas macroscópicas, mostrando a divisão das partículas em elementos com forma de triângulos e os diferentes tipos de contato entre	

partículas, A) Contato de colisão da partícula com a superfície, B) Contato de união entre dois elementos, C) Contato de colisão entre partículas (Potapov e Campbell, 1994).....	37
Figura II-14. Simulação das tensões e das trincas geradas em uma partícula sob carregamento diametral sem confinamento da mesma (Tang et al., 2001).	38
Figura II-15. Esquema da simulação de uma bola em queda livre, sobre um leito de 4 camadas de partículas com diferentes coeficientes de atrito, a) $\mu = 0,1$ e b) $\mu = 0,6$ (Potapov e Campbell, 1999).	39
Figura II-16. Distribuição das tensões durante o processo de fratura interparticular (Kou et al., 2001).....	40
Figura II-17. Efeito do tamanho de partícula na relação entre a energia específica de cominuição e o parâmetro t_{10} para diferentes tamanhos iniciais de partículas de um minério de cobre.	44
Figura II-18. Probabilidades de quebra e distribuição de energias específicas de fratura de partículas de 45,0 x 37,5 mm de bauxita (Tavares, 2009).	45
Figura II-19. Seqüência de mecanismos para um evento de quebra (Tavares e Carvalho, 2009).	47
Figura III-1. Diagrama esquemático da célula de carga de impacto (Tavares e King, 1998).	52
Figura III-2. Leitos de diferentes diâmetros monodispersos de uma monocamada, conformados por partículas de diferentes tamanhos de minério de cobre do Sossego.....	55
Figura III-3. Numero de partículas do leito em função da razão entre o diâmetro do leito e o tamanho médio de partícula, para partículas de calcário Cantagalo.	56
Figura III-4. Área de captura de uma esfera de 88 mm e energia de impacto de 9,15 J, para diferentes tamanhos de partícula.....	57
Figura III-5. Célula de carga de impacto de 63 mm com acessórios para o ensaio de quebra de leitos por impacto com barra.	58
Figura III-6. Célula de carga de impacto de 63 mm com acessórios para o ensaio de quebra de leitos por impacto com bola.....	59

Figura III-7. Análise granulométrica da quebra de um leito de dois anéis de partículas de minério de cobre de 6,30 x 4,75mm, com uma bola de 88 mm e energia de impacto de 3,05 J.....	59
Figura III-8. Esquema do arranjo hexagonal de partículas, com três anéis de partículas.	60
Figura III-9. Interface do software EDEM, com os parâmetros do modelo de contato.	62
Figura III-10. Simulação em EDEM para um leito monocamada com partículas de 0,5 mm de material “Rock” impactadas por uma bola de material “Steel” de 88 mm com energia de impacto de 3,05 J. a)Numero de partículas versus energia de impacto absorvida b) Posição radial das partículas versus energia de impacto absorvida.	64
Figura IV-1. Curva de força versus tempo de um ensaio de fratura por impacto na CCI de 19 mm para uma partícula de 11,2 x 9,5 mm de Minério de ferro Timbopeba.	65
Figura IV-2. Distribuição da energia de fratura para diferentes tamanhos de partícula do Calcário Cantagalo.....	66
Figura IV-3. Energia de fratura específica para diferentes tamanhos de partícula e diferentes materiais.....	67
Figura IV-4. Função quebra de partículas individuais de 5,30 x 4,75 mm de minério de cobre Sossego, aplicando diferentes energias de impacto.	67
Figura IV-5. Parâmetro t_{10} para diferentes energias de impacto e diferentes tamanhos de partícula do minério de cobre de Sossego.....	68
Figura IV-6. Dados experimentais e ajuste do modelo do parâmetro t_{10} versus a razão entre a energia específica de impacto E_{cs} e a energia de fratura específica média das partículas E_{50} para o minério de cobre de Sossego.	68
Figura IV-7. Dados experimentais da relação de t_{10} versus t_n para o minério de cobre (pontos) e ajuste da função beta incompleta (linhas).....	69
Figura IV-8. Quebra de partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego, com energia específica de impacto de 0,18 kWh/t, utilizando um impactor plano e diferentes condições de carregamento.	71
Figura IV-9. Esquema da estimação da energia de fratura a partir dos dados de quebra de leitos com barra.	73

Figura IV-10. Dados experimentais e simulação para o ensaio de quebra de leitos com impactor plano, para partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego.....	73
Figura IV-11. Dados de E_{50} em função do tamanho de partícula para diferentes materiais e modelo de ajuste para dados de quebra individual na CCI e quebra em leitos com barra.	74
Figura IV-12. a) Impressão do impacto de uma bola de 88 mm sobre um leito monocamada com partículas de 0,600 x 0,425 mm com uma energia de impacto de 1,52 J. b) Análise digital da impressão de leitos para determinar o raio de captura.	75
Figura IV-13. Raio de captura versus tamanho de partícula, para leitos de minério de cobre de Sossego com diferentes energias de impacto e diâmetro de bola de 88 mm.	76
Figura IV-14. Raio de captura versus energia de impacto, para leitos de diferentes tamanhos de partículas do minério de cobre de Sossego e diâmetro de bola de 88 mm.	76
Figura IV-15. Raio de captura diâmetro de bola, para leitos de tamanho de partícula de 0,425 x 0,300 mm do minério de cobre de Sossego e diferentes energias de impacto.	76
Figura IV-16. Energia de impacto absorvida em função do raio do leito, para partículas de 0,5 mm de material “Rock” impactadas com uma bola de 88 mm de material “Steel” com energia de impacto de 3,05 J, obtida por EDEM.	77
Figura IV-17. Raio de captura em função do tamanho de partícula para simulações de impacto em leitos monocamada de material “Rock”, com bolas de material “Steel” de diferentes diâmetros, com energia de impacto de 3,05 J, estimado usando EDEM. .	78
Figura IV-18. Número de partículas versus energia de impacto absorvida, para partículas de 0,5 mm de material “Rock” impactadas com uma bola de 88 mm de material “Steel” com diferentes energias de impacto.....	78
Figura IV-19. Número de partículas versus energia de impacto absorvida, para partículas de 5,4 mm de material “Rock” impactadas com uma bola de 88 mm de material “Steel” com diferentes energias de impacto.....	79
Figura IV-20. a) Imagem do interior de um moinho de bolas, mina VALE Alegria, Mariana – MG. b) Detalhe do mecanismo de impacto de leitos dentro do moinho de bolas.....	80

Figura IV-21. Erro experimental para a quebra de leitos monocamada de dois anéis com partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego com energia de impacto de 3,05 J e bola de 88 mm.....	80
Figura IV-22. Quebra de monocamadas de partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego, com energia de impacto de 3,05 J, utilizando diferentes impactores.....	81
Figura IV-23. Quebra de monocamadas de partículas de 0,425 x 0,300 mm de calcário Cantagalo, com energia de impacto de 3,05 J, utilizando diferentes impactores.	81
Figura IV-24. Esquema dos leitos de um anel empacotado e dois anéis não empacotados.	82
Figura IV-25. Quebra de monocamadas de partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego, com energia de impacto de 3,05 J, diâmetro da bola de 88 mm e diferentes graus de compactação do leito.	82
Figura IV-26. Quebra de monocamadas de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto e tamanho de partículas, diâmetro da bola de 88 mm.	83
Figura IV-27. Quebra de diferentes arranjos de partículas de minério de cobre de Sossego, para uma energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.	84
Figura IV-28. Leito de partículas sendo impactado por um corpo moedor sobre uma superfície plana.....	85
Figura IV-29. Raio de captura para diferentes valores da altura remanescente a/h depois do impacto com bola sobre um leito monocamada.....	88
Figura IV-30. Ajuste dos dados experimentais do raio de captura obtidos nos ensaios de impressão de leitos.....	89
Figura IV-31. Comparação entre os dados experimentais e simulados para o raio de captura. ..	89
Figura IV-32. Simulação e dados experimentais do raio de captura em função da energia de impacto, para leitos de diferentes tamanhos de partículas do minério de cobre de Sossego e diâmetro de bola de 88 mm.....	90
Figura IV-33. Simulação e dados experimentais do raio de captura em função da energia de impacto, para leitos de diferentes tamanhos de partículas do minério de cobre de Sossego e diâmetro de bola de 40 mm.....	90

Figura IV-34. Simulação da função de fração radial de energia de impacto $f(r)$ em função do raio de captura para um leito de partículas de 0,600 x 0,425 mm.	92
Figura IV-35. Quebra de diferentes arranjos de partículas de quartzo por impacto com bola. Energia de impacto 2,44 J, diâmetro da bola 80 mm, tamanho de partícula 4,00 x 4,75 mm (Bourgeois, 1993).	94
Figura IV-36. Quebra por impacto de diferentes arranjos de partículas de minério de cobre de Sossego por impacto com bola. Energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.	94
Figura IV-37. Quebra por impacto de diferentes arranjos de partículas de calcário Cantagalo por impacto com bola. Energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.	94
Figura IV-38. Quebra por impacto de diferentes arranjos de partículas de minério de ferro de Timbopeba por impacto com bola. Energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.	95
Figura IV-39. Quebra de leitos com varias camadas de quartzo de 4,75 x 4,00 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 80 mm.	96
Figura IV-40. Quebra de leitos com varias camadas de minério de cobre de Sossego de 6,30 x 4,75 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 88 mm.	96
Figura IV-41. Quebra de leitos com varias camadas de calcário Cantagalo de 6,30 x 4,75 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 88 mm.	96
Figura IV-42. Quebra de leitos com varias camadas de minério de ferro de Timbopeba de 6,30 x 4,75 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 88 mm.	97
Figura IV-43. Quebra de monocamadas com partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	97
Figura IV-44. Quebra de monocamadas com partículas de 6,30 x 4,75 mm de calcário Cantagalo para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	98
Figura IV-45. Quebra de monocamadas com partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de ferro de Timbopeba para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	98

Figura IV-46. Quebra de monocamadas com partículas de 1,7 x 1,4 mm de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	98
Figura IV-47. Quebra de monocamadas com partículas de 1,7 x 1,4 mm de calcário Cantagalo para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	99
Figura IV-48. Quebra de monocamadas com partículas de 1,7 x 1,4 mm de minério de ferro de Timbopeba para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	99
Figura IV-49. Quebra de monocamadas com partículas de 0,425 x 0,300 mm de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	99
Figura IV-50. Quebra de monocamadas com partículas de 0,425 x 0,300 mm de calcário Cantagalo para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).	100
Figura IV-51. Quebra de monocamadas com partículas de 0,425 x 0,300 mm de minério de ferro de Timbopeba para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).....	100
Figura IV-52. Quebra de monocamadas de minério de cobre de Sossego com energia de impacto de 3,05 J para diferentes diâmetros de corpo moedor e tamanhos de partículas.	101
Figura IV-53. Quebra de monocamadas com tamanho de partícula de 0,425 x 0,300 mm de minério de cobre de Sossego com energia de impacto de 1,0 J para diferentes diâmetros de corpo moedor.....	102
Figura IV-54. Quebra de monocamadas de calcário Cantagalo com energia de impacto de 3,05 J para diferentes diâmetros de corpo moedor e tamanhos de partículas.....	102

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela III-1. Materiais usados no presente trabalho	50
Tabela III-2. Condições usadas nos experimentos de quebra de leitos com bola	61
Tabela III-3. Parâmetros de contato utilizados nas simulações de impacto em leitos utilizando o software EDEM.	64
Tabela IV-1. Parâmetros do modelo da função quebra obtidos a partir dos ensaios de fragmentação de partículas	70
Tabela IV-2. Parâmetros de ajuste do modelo de E_{50} em função do tamanho de partícula para diferentes materiais.	74
Tabela IV-3. Resultados das simulações de impacto em leitos para diferentes arranjos de partículas e diferentes materiais.....	95
Tabela IV-4. Resultados das simulações de impacto em leitos para diferentes energias de impacto, tamanhos de partícula e materiais.	101

LISTA DE SIMBOLOS

Símbolos latinos

A	constante do modelo de Bond.
a_c	parâmetro do modelo de raio de captura.
A_N	parâmetro de quebra do material do modelo do JKMRC.
b	parâmetro de quebra do material do modelo do JKMRC.
b_c	parâmetro do modelo de raio de captura.
$b_{i,j}$	fração do material inicial de monotamanho j que passou ao novo tamanho i .
B_{ij}	valor acumulado dos valores de b para o tamanho j .
$B_d(e,p)$	função quebra obtida por meio de ensaios de impacto em leitos de partícula no modelo de Cho.
B_M	função quebra para o moinho de bolas na forma acumulada no modelo de Cho.
d	tamanho das bolas que compõem a carga moedora.
D	diâmetro do moinho.
d_0	parâmetro do modelo de E_{50} de Tavares.
d_{80}	raiz quadrada do tamanho de abertura da peneira pela qual passa 80% do material.
d_i	tamanho de partícula.
D_1	diâmetro do leito.
D_n^*	parâmetro que representa a quantidade de dano
d_{p1}	parâmetro do modelo de Herbst.
e	fração da energia de colisão capturada pelas partículas individuais durante evento de tensão.
E	energia de impacto o de fratura.
\bar{E}	energia específica aplicada no modelo de Cho.
E_{50}	energia de fratura média.
E_{50i}	energia de fratura mediana,
E_∞	energia específica de fratura de partículas de tamanho infinito para o modelo de E_{50} de Tavares.
$E(e)$	energia associada ao índice do nível energético e .
$E_{\max,i}$	representa o truncamento superior da função de distribuição de energia de fratura.
E_R	energia específica de moagem da equação de Rittinger.
$f(e)$	fração do e -ésimo nível energético no espectro de energias de impacto no moinho de bolas.
$F(r)$	função de repartição radial.
$F_1(eE, t)$	probabilidade de quebra das partículas da classe 1 quando recebem um impacto de energia eE .
f_c	grau de compactação do leito.
f_e	parâmetro de eficiência.
Gbp	moabilidade do ensaio de Bond.
h	altura do leito.
J	fração em volume de enchimento do moinho com os corpos moedores.
K	constante da equação de Charles.
K_B	constante de correção do modelo de Bond.

k_c	parâmetro do modelo de quebra em leitos.
k_H	constante da teoria de contato de Hertz.
K_K	constante da equação de Kick.
K_R	constante da equação de Rittinger.
L	comprimento do moinho.
M	massa total de partículas que compõem o leito.
M_B	vazão de material que é processado no moinho no modelo de Bond.
$m_1(E, t)$	massa da partícula da classe i que é impactada.
$m_b(d_i', d_i)$	massa de partículas menores que d_i' que são criadas a partir da quebra das partículas de tamanho d_i quando submetidas a um impacto de energia E .
m_p	potência no eixo no modelo de Bond.
m_k	fração mássica do tamanho de bola da classe k na carga de corpos moedores.
n_1	parâmetro do modelo de Austin para a função quebra.
n_2	parâmetro do modelo de Austin para a função quebra.
$Np_{cap\ i}$	número de partículas que compõem o leito.
P	potência (energia) que o moinho consome
p_1	peneira para a classificação do material do produto no ensaio de Bond.
$p(e)$	função de repartição de energia do impacto no leito de partículas.
$P(E)$	função de densidade de probabilidades das energias de impacto no moinho.
$p(E, t)$	distribuição de densidade das colisões dentro do moinho.
r	raio da zona de captura.
r_B	raio da bola.
r_c	raio de captura.
$r_{i,k}$	fração mássica das partículas pertencentes á classe i que quebram devido à colisão de nível de energia k no modelo de Datta.
s	altura final do leito após o impacto.
S_1	parâmetro do modelo de Austin para a função seleção.
S_i	taxa específica de fratura.
S_i^E	parâmetro do modelo de Herbst.
t_{10}	parâmetro da função quebra do modelo do JKMRC.
t_{10max}	parâmetro da função quebra do modelo de Tavares.
t_n	parâmetros da função quebra do MGC.
U	enchimento intersticial do moinho.
V_A	volume ativo.
W	massa de material que é processado no moinho.
w_1^e	fração mássica da classe 1 que quebro devido à aplicação da energia $E(e)$.
$w_1(t)$	fração de partículas na classe 1 depois de um tempo de moagem t .
w_i	fração de material na classe i antes do evento de quebra.
Wi	índice de trabalho do material (Work Index).
w_i^*	fração de material na classe i depois do evento de quebra.
Wi_D	Wi corrigido.
w_n	fração mássica de material retida em cada peneira.
x_i	tamanho de partícula na equação que relaciona a energia à fragmentação.
x_{max}	tamanho máximo de partículas do leito.
Z	vazão do produto do modelo de Bond.

Símbolos gregos

α	parâmetro do modelo de raio de captura.
α_0	ângulo entre o eixo da bola e o perímetro do volume ativo.
α_C	parâmetro do modelo de quebra em microescala.
α_n	parâmetros da função quebra do MGC.
α_r	constante da função de repartição radial.
β	parâmetro da função quebra do modelo de Tavares.
β_F	fator de forma.
β_n	parâmetros da função quebra do MGC.
γ	constante de acumulação de dano.
ζ_1	parâmetro do modelo de Herbst.
ζ_2	parâmetro do modelo de Herbst.
η	parâmetro do modelo de Austin para a função seleção.
λ_k	parâmetro do numero total de impactos de um determinado nível de energia k no modelo de Datta.
Λ	parâmetro do modelo de Austin para a função seleção.
μ	parâmetro do modelo de Austin para a função seleção.
ρ	peso específico do material.
ρ_b	densidade dos corpos moedores.
φ_c	fração da velocidade crítica.
σ_i^2	variância da distribuição de energia de fratura.
τ	tempo de residência.
ϕ	parâmetro do modelo de E_{50} de Tavares.
Φ	parâmetro do modelo de Austin para a função quebra.
ψ_c	deformação de fratura.
ψ_n	deformação máxima atingida durante o n -ésimo evento de carregamento.
$\omega(t)$	freqüência de colisões por segundo no interior do moinho.

I. INTRODUÇÃO

Os processos de redução de tamanho de partícula ou cominuição podem se destinar a vários objetivos. Por exemplo, no beneficiamento de minérios, a cominuição é necessária para se atingir uma granulometria e um grau de liberação adequados ao processo de concentração utilizado. Na hidrometalurgia é necessário apenas atingir uma granulometria que promova a exposição adequada dos minerais a serem lixiviados. Em outros casos, a cominuição é necessária para a obtenção de produtos comerciais, como é o caso da produção de agregados para uso em concretos e granulados de minério de ferro para alto-forno.

Especificamente na etapa da moagem o equipamento responsável pela maior parcela da redução de tamanhos é o moinho de bolas. Este tipo de moinho se caracteriza pelo uso de bolas como corpos moedores. Estes corpos moedores são movimentados no interior do moinho junto com a carga de material que se deseja moer. Os parâmetros de operação, as dimensões do moinho, a quantidade e tipo de corpos moedores, a quantidade de energia necessária para movimentar a carga interior dos moinhos e a eficiência de redução de tamanho de partícula, têm sido extensivamente estudados.

O entendimento da influência das variáveis nos processos de moagem é importante devido ao fato que nas operações industriais se deseja ter controle principalmente sobre a quantidade de produto com as especificações desejadas, a eficiência no uso da energia e sobre o desgaste e durabilidade dos corpos moedores e revestimentos.

Para modelar e escalonar moinhos de bolas é necessário estudar os processos que acontecem no interior do moinho e observar a sua relação com as variáveis de operação do moinho. Atualmente, a fim de descrever de forma precisa o processo da moagem em moinho de bolas, o nível de complexidade dos modelos exige o

entendimento dos macroprocessos que acontecem no equipamento e dos microprocessos característicos de cada tipo e condição de moagem para diferentes materiais.

As primeiras tentativas de descrever quantitativamente os processos de moagem foram propostas no final do século XIX por Rittinger (1867), Kick (1885) e Bond (1950). A modelagem da cominuição proposta por estes autores, que é essencialmente empírica, é baseada na quantidade de energia necessária para reduzir o tamanho de partícula de um material. A metodologia usada para a modelagem e escalonamento de moinhos por esses métodos toma como referência exclusivamente os resultados obtidos por meio da experiência adquirida.

Posteriormente, nas décadas de 60 e 70, se aplicou o modelo do balanço populacional como uma ferramenta para desenvolver a modelagem fenomenológica dos processos de moagem em moinhos de bolas. Metodologias de modelagem e escalonamento foram desenvolvidas por Austin et. al., (1984), Whiten (1972) e Herbst e Fuerstenau (1973). O modelo é baseado na hipótese de que o moinho é um reator de mistura perfeita, com uma massa de material que recebe vários eventos de fratura enquanto o moinho se encontra em operação. A caracterização do modelo depende de duas funções, que são a função quebra que descreve a distribuição das partículas geradas num evento de impacto primário, e a função seleção que é a taxa ou velocidade de quebra das partículas. Essas metodologias têm encontrado sucesso, mas têm dificuldades em descrever efeitos não-lineares de quebra de partículas, não sendo capazes de descrever a influência de algumas variáveis, como o perfil dos revestimentos do moinho, no processo de moagem.

Tendo em vista as limitações das metodologias anteriores de escalonamento, diversos autores, incluindo Cho (1987), Mishra e Rajamani (1992), Bourgeois e King (1993) e Datta (1998), propuseram uma modelagem mecanicista da moagem que inclui

o entendimento dos microprocessos de quebra característicos de cada material e a distribuição de energia no interior de moinhos. Mais recentemente, Carvalho e Tavares (2009) propuseram uma versão mais completa do modelo mecanicista do moinho de bolas, mas que ainda demanda a modelagem de alguns dos microprocessos que ocorrem na moagem.

A fim de compreender estes microprocessos para modelá-los adequadamente, é necessário entender como é a distribuição de partículas geradas e também a quantidade de energia que é gasta no processo de redução de tamanho das partículas, já que nem toda a energia que é inicialmente aplicada às partículas, é energia útil de fragmentação.

Além da caracterização da quebra de partículas individuais, também é necessário o entendimento de como se comportam as partículas quando estão formando leitos, já que dentro dos moinhos de bolas as partículas recebem a energia proveniente dos corpos moedores quando elas estão agrupadas em leitos de uma ou várias camadas, e em diferentes configurações geométricas.

Vários autores como Cho (1987), Bourgeois e King (1993), Schönert (1996), Datta (1998) e Potapov e Campbell (1999), estudaram a relação da quebra de partículas em leitos para diferentes tipos de carregamento e diferentes configurações de leitos, com o intuito de estabelecer quais são os fenômenos físicos que prevalecem em cada caso para poder modelar uma função que seja capaz de descrever de forma precisa a distribuição de tamanho das partículas geradas e a distribuição de energia absorvida pelo leito em forma de energia de fratura.

O presente trabalho tem o objetivo de propor uma formulação, bem como validar funções que descrevem o volume de partículas capturadas por um corpo moedor e a repartição da energia de impacto entre as partículas capturadas no choque entre corpos moedores. As funções propostas foram validadas a partir de ensaios de quebra de leitos

e simulações utilizando o software comercial EDEM[®], utilizando diferentes condições de impacto, partículas em diferentes faixas de tamanhos e diferentes materiais. As funções validadas acrescentam um maior nível de detalhe às equações da Modelagem Generalizada da Cominuição.

Com este nível de detalhe nos modelos matemáticos, se espera poder prever de forma precisa o funcionamento dos processos de cominuição e escalonar moinhos de bolas industriais com base em dados de ensaios de laboratório, diminuindo, assim, o número de ensaios em usina piloto ou em escala industrial, na etapa do projeto de processos de beneficiamento.

II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

II.1 Modelagem matemática de moinhos de bolas

Atualmente podem ser identificadas três principais metodologias de dimensionamento e simulação de moinhos, que são aquelas baseadas nos modelos empíricos, nos fenomenológicos e nos mecanicistas (Silva, 2007).

Os modelos empíricos têm sua maior expressão na terceira lei de cominuição enunciada por Fred Bond e depois com o método de dimensionamento desenvolvido por Rowland e Kjos. Eles tomam como referência exclusivamente os resultados obtidos por meio da experiência adquirida (Austin e Concha, 1993).

Os modelos fenomenológicos são aqueles que consideram um equipamento de cominuição como aquele capaz de conferir uma transformação entre a distribuição granulométrica do material da alimentação do equipamento e a distribuição granulométrica do produto final deste mesmo equipamento. Um modelo fenomenológico visa prever a distribuição granulométrica de um determinado produto, a partir da distribuição granulométrica do material da alimentação, considerando a distribuição das partículas filhas geradas e a taxa de quebra das partículas. A partir destes dados, é possível fazer uma simulação baseada no retro-cálculo dos dados obtidos em planta. Isso pode ser classificado como modelagem fenomenológica, considerando que esta abordagem se limita a descrever com médias os principais fenômenos envolvidos na quebra, ao invés de considerar os princípios físicos fundamentais envolvidos neste problema. O Modelo do Balanço Populacional é o exemplo de modelagem mais amplamente utilizado na simulação de processos de cominuição.

Com relação aos modelos mecanicistas, pode-se afirmar que são aqueles que consideram cada elemento envolvido no processo. Os modelos mecanicistas da moagem consideram, com base na mecânica Newtoniana e pelo uso de ferramentas computacionais poderosas, diretamente as interações entre as partículas alimentadas e os diversos elementos que compõem os equipamentos de cominuição. A outra característica dos modelos mecanicistas é que eles consideram as propriedades de cada material, permitindo descrever o comportamento das partículas individuais dentro do ambiente de moagem em cada um dos equipamentos de cominuição. Esses modelos, entretanto, ainda não foram plenamente validados a partir de dados de laboratório e industriais.

II.2 Modelagem empírica

O objetivo principal de qualquer processo de cominuição é diminuir o tamanho de partícula de um determinado produto, geralmente por meio de transferência da maior quantidade de energia mecânica do equipamento às partículas da alimentação resultando em eventos múltiplos de fratura. Os processos industriais de cominuição atualmente usados são caracterizados por eficiências notadamente baixas (Fuerstenau e Abouzeid, 2002). Isto se deve ao consumo de energia associado às perdas na transmissão de energia elétrica e mecânica, assim como a ineficiência devida às resistências nocivas que se apresentam na parte mecânica dos equipamentos na forma de inércia das peças, deformações elásticas do equipamento bem como, geração de ruído, calor e vibração no mesmo. Por outra parte existe ineficiência na aplicação de energia mecânica para gerar fratura das partículas, devido, principalmente, ao fato que, na maioria dos casos, a energia de impacto nos equipamentos de cominuição é excessiva ou insuficiente para causar ruptura das partículas.

Devido à baixa eficiência energética e à grande contribuição da energia nos custos de produção, durante muito tempo os processos de cominuição foram estudados somente com respeito à energia consumida, e todos os modelos clássicos de avaliação do processo de fragmentação associavam a energia consumida ao grau de redução de tamanho, expresso como porcentagem passante em uma determinada peneira (Silva, 2007).

Quanto mais fino o produto, maior a quantidade de energia necessária para se alcançar uma redução de tamanho equivalente. Logo, energia e fragmentação podem ser relacionadas por (Wills, 1997):

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{K}{x^n} \quad \text{Equação II-1}$$

sendo dE a energia incremental necessária para produzir uma redução de tamanho dx , K é uma constante e x o tamanho de partícula.

Da Equação II-1 se tem várias soluções que são chamadas de “Leis da cominuição”. A primeira lei foi postulada por Rittinger em 1867. Ele propõe que a energia consumida na cominuição é proporcional à nova superfície gerada, sendo a área específica dos materiais inversamente proporcional ao tamanho das partículas. Neste caso, o valor da constante n da Equação II-1 é igual a $n = 2$ de modo que:

$$E_R = -K_R \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \quad \text{Equação II-2}$$

sendo K_R uma constante, E é a energia específica de moagem, x_1 o tamanho representativo de partícula da alimentação e x_2 o tamanho representativo de partícula do produto. A primeira lei não teve muita aplicação na prática na moagem convencional, mas observa-se que a equação descreve com algum sucesso a cominuição de partículas finas e ultrafinas.

A segunda lei de cominuição, postulada por Kick em 1885, propõe que a energia consumida na cominuição depende apenas da razão de redução, sendo independente da granulometria original das partículas. O valor da constante $n = 1$ na Equação , dá como resultado a relação:

$$E_R = -K_K * \text{Log} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad \text{Equação II-3}$$

Em geral, observa-se que a segunda lei de cominuição tem uma maior aplicação prática na cominuição de partículas grossas, principalmente na etapa de britagem.

A terceira lei foi postulada por Fred Bond em 1952. Nesta lei se considerou que o trabalho envolvido na cominuição era inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho de abertura da peneira pela qual passa 80% do produto, sendo este tamanho definido como o d_{80} .

Bond define o parâmetro Wi como o índice de trabalho do material (*Work Index*), que é o trabalho total expresso em unidades de kWh/ton curta, necessário para reduzir uma tonelada curta de material desde um tamanho teoricamente infinito até que o d_{80} do material seja de 100 μm .

$$E = Wi \left(\frac{10}{\sqrt{x_2}} - \frac{10}{\sqrt{x_1}} \right) \quad \text{Equação II-4}$$

O parâmetro Wi depende da resistência do material à cominuição e também do tipo de equipamento de cominuição usado. Assim, é necessário determinar experimentalmente esse parâmetro para cada tipo de aplicação por meio de um ensaio padronizado. O índice de trabalho também pode ser usado na avaliação da eficiência mecânica do equipamento (Wills, 1997).

A partir da terceira lei e dos ensaios padronizados, Bond desenvolveu uma metodologia para escalonamento de moinhos. Esta metodologia apresenta algumas

vantagens no sentido em que é uma alternativa simples para o escalonamento de moinhos de bolas e apresenta ser efetiva em muitos dos casos aplicados além de que existe uma grande quantidade de dados experimentais disponíveis, (Austin e Concha 1993).

II.2.1 Método de escalonamento de moinhos de bolas de Bond

Este método teve uma ampla acolhida na indústria minero-metalúrgica, principalmente por duas vantagens. A primeira é a simplicidade do método no dimensionamento de moinhos e a segunda é que o método de Bond se mostra eficaz em muitas aplicações em escala industrial.

O objetivo do método é selecionar o diâmetro e o comprimento do moinho para obter M toneladas de produto por hora, com um tamanho de partícula d_{80} definido.

Uma discussão que descreve as limitações do método de escalonamento de Bond foi feita por Austin (Austin e Concha, 1993). A principal limitação do método de escalonamento de Bond é que ele é somente válido para moagem em circuito fechado e em condições estabelecidas de operação. O método não considera vários dos efeitos menores dentro da operação dos moinhos, de maneira que não pode ser usado no ajuste ou otimização da operação de um circuito de moagem determinado. Alguns dos fatores que o método não leva em consideração são a razão de recirculação, a eficiência do classificador, a mistura de bolas de diferentes tamanhos, variações causadas pelos parâmetros geométricos do moinho como o *hold-up* ou os revestimentos do moinho.

Uma limitação adicional diz respeito ao fato que o método de Bond só usa um ponto (d_{80}) da curva de distribuição granulométrica para a descrição da distribuição granulométrica da alimentação e do produto do moinho o que desconsidera vários dos efeitos da classificação.

II.2.1.1 Ensaio de moabilidade padronizado

Neste ensaio se realiza a operação de moagem a úmido num moinho de bolas padrão de 305 x 305 mm com interiores arredondados, emulando a operação de um moinho contínuo de 2,44 m de diâmetro interno, em circuito fechado, com 350% de carga circulante e com uma peneira definida de diâmetro p_1 para a classificação do material do produto. Com este ensaio se obtêm a moabilidade Gbp , que é definida como a quantidade de material menor que o tamanho da peneira p_1 produzido por revolução do moinho padrão (Austin e Concha, 1993).

II.2.1.2 Cálculo do índice de trabalho W_i

Com o parâmetro Gbp e a Equação II-5, estima-se o índice de trabalho W_i (Austin e Concha, 1993).

$$W_{i_T} = \frac{(1,1)(44,5)}{p_1^{0,23} Gbp^{0,82} \left(\frac{10}{\sqrt{x_2}} - \frac{10}{\sqrt{x_1}} \right)} \quad \text{Equação II-5}$$

sendo W_{i_T} o índice de trabalho em kWh/ton métricas e p_1 o diâmetro da peneira de separação em μm . Este último valor depende do tamanho que se deseja simular. O parâmetro Gbp é a moabilidade e x_2 e x_1 são os diâmetros, em μm , das peneiras por onde passou 80% do material do produto e da alimentação, respectivamente.

II.2.1.3 Escalonamento a moinhos de dimensões maiores

Quando se trabalha com moinhos de dimensões maiores e condições diferentes às do ensaio padrão se utiliza um índice de trabalho W_{i_D} , o qual depende do diâmetro do moinho D sendo:

$$W_{i_D} = \begin{cases} (2,44/D)^{0,2} W_{i_T} & \text{para } D \leq 3,81 \text{ m} \\ 0,914 W_{i_T} & \text{para } D \geq 3,81 \text{ m} \end{cases} \quad \text{Equação II-6}$$

II.2.1.4 Correção para diferentes tipos de operação dos moinhos

Para outras condições de operação se tem outros fatores de correção, com os quais se obtém o Índice de trabalho W_i .

$$W_i = K_B W_{iD} \quad \text{Equação II-7}$$

sendo

$$K_B = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5$$

A seguir se descreve em que condições se aplicam cada um dos fatores adimensionais de conversão:

K_1 : Fator de correção para moagem em circuito aberto.

K_2 : Fator de correção para moagem a seco.

K_3 : Fator de correção quando se tem um tamanho grosso na alimentação.

K_4 : Fator de correção para moagem fina.

K_5 : Fator de correção quando a razão de redução é pequena.

II.2.1.5 Cálculo da energia específica

A partir do conceito de que as partículas de um material diminuem de tamanho com a absorção de energia, Bond utiliza a Equação II-4 para calcular a energia específica de moagem E em kWh/ton. Para calcular a potência que consome o moinho no eixo sem levar em conta as perdas elétricas, se utiliza a seguinte relação:

$$m_p = ME \quad \text{Equação II-8}$$

sendo m_p a potência no eixo, em kW, M a vazão de material que é processado no moinho, em ton/h e E a energia específica de moagem, em kWh/ton.

II.2.1.6 Cálculo da potência para movimentar os corpos moedores

O Método de Bond propõe a Equação II-9 para calcular a potência para movimentar os corpos moedores dentro do moinho.

$$m_p = 7,33AJ\varphi_c(1-0,937J)\left(1-\frac{0,1}{2^{9-10\varphi_c}}\right)\rho_b LD^{2,3} \quad \text{Equação II-9}$$

sendo J a fração em volume de enchimento do moinho com os corpos moedores, φ_c a fração da velocidade crítica, ρ_b a densidade dos corpos moedores, L e D o comprimento e o diâmetro do moinho em metros e A uma constante que depende do tipo de moinho.

II.2.1.7 Procedimento de cálculo

A modelagem do moinho está baseada na potência no eixo necessária para reduzir o material ao tamanho de partícula desejado e a potência no eixo que se precisa para movimentar a carga de corpos moedores. Combinando as equações vistas anteriormente se tem a Equação II-10 e a Equação II-11, com as quais pode-se calcular a vazão do produto Z em ton/h ou o diâmetro do moinho D em m. Geralmente para saber as dimensões do moinho se pressupõe uma razão do comprimento sobre o diâmetro de $L/D = 1,5$.

$$\begin{aligned} M &= 6,13ZD^{3,5} & D &\leq 3,81m \\ M &= 8,01ZD^{3,3} & D &\geq 3,81m \end{aligned} \quad \text{Equação II-10}$$

$$Z = \frac{A\rho_b\left(\frac{L}{D}\right)\left(J-0,937J^2\right)\left(\varphi_c-\frac{0,1\varphi_c}{2^{9-10\varphi_c}}\right)}{KW_i_T\left(10/\sqrt{x_Q}-\sqrt{x_G}\right)} \quad \text{Equação II-11}$$

II.3 Modelagem fenomenológica

O modelo é baseado na hipótese de que o moinho é um reator bem misturado, com uma massa de material W que é sujeita a vários eventos de fratura enquanto o moinho está operando (Austin e Concha, 1993). A distribuição granulométrica do material se representa com uma serie geométrica de peneiras que tem intervalos de $2^{0,5}$ ou $2^{0,25}$, enquanto a fração mássica de material retida em cada peneira é representada

por w_1 para a maior faixa de tamanhos de partícula e w_2, w_3, \dots, w_n para as faixas de tamanho de partícula menores.

O modelo do balanço populacional descreve relativamente bem o fenômeno da moagem num moinho. Uma das limitações deste modelo está associada ao fato que a taxa de quebra nem sempre é linear. Neste caso o ajuste da função se tornaria complexo e se precisaria de extensivos estudos de laboratório e planta-piloto com o objetivo de derivar fatores que descrevam a cinética da quebra do material (Tavares e Carvalho, 2009).

Por último, o modelo tem limitações para prever moagem de materiais heterogêneos, devido ao fato que o método do balanço populacional não oferece nenhuma relação quantitativa entre as funções de quebra e seleção e as propriedades mecânicas intrínsecas do material.

II.3.1 Função seleção ou taxa específica de quebra

Na moagem de partículas de um material que inicialmente se encontra numa faixa de tamanho de partícula x_1 , considera-se que a velocidade de desaparecimento das partículas desta faixa de tamanho para formar partículas novas de menor tamanho tem o comportamento de uma função de primeira ordem:

$$\frac{dw_1(t)}{dt} = -S_1 w_1(t) \quad \text{Equação II-12}$$

A Equação II-12 representa a velocidade de desaparecimento da massa das partículas do tamanho x_1 por fratura. S_1 é a taxa específica de fratura que tem unidades de t^{-1} . Integrando a Equação II-12 com S_1 constante e condição inicial de $w_1(0) = 1$ se tem a solução para a função de diminuição da fração mássica w_1 com respeito ao tempo.

$$w_1(t) = w_1(0) \exp(-S_1 t) \quad \text{Equação II-13}$$

II.3.1.1 Modelo do Austin para a função seleção

A função seleção é fortemente dependente do ambiente de moagem, sendo influenciada pelo diâmetro e velocidade do moinho, pela distribuição de tamanhos da carga de bolas, pelo grau de enchimento do moinho e pelo *hold-up* de partículas sólidas (King, 2001).

A Figura II-1 ilustra um comportamento típico da função seleção em função do tamanho de partícula x_i . A função seleção apresenta um valor máximo num determinado tamanho de partícula, que representa a dimensão acima da qual os impactos promovidos pelos corpos moedores não são mais suficientes para a redução de tamanho da partícula. A energia específica de fratura diminui com o aumento do tamanho da partícula, mas o gradiente de redução diminui ainda mais com o aumento do tamanho da partícula e, eventualmente, torna-se aproximadamente constante para partículas maiores em apenas poucos milímetros (Tavares e King, 1998).

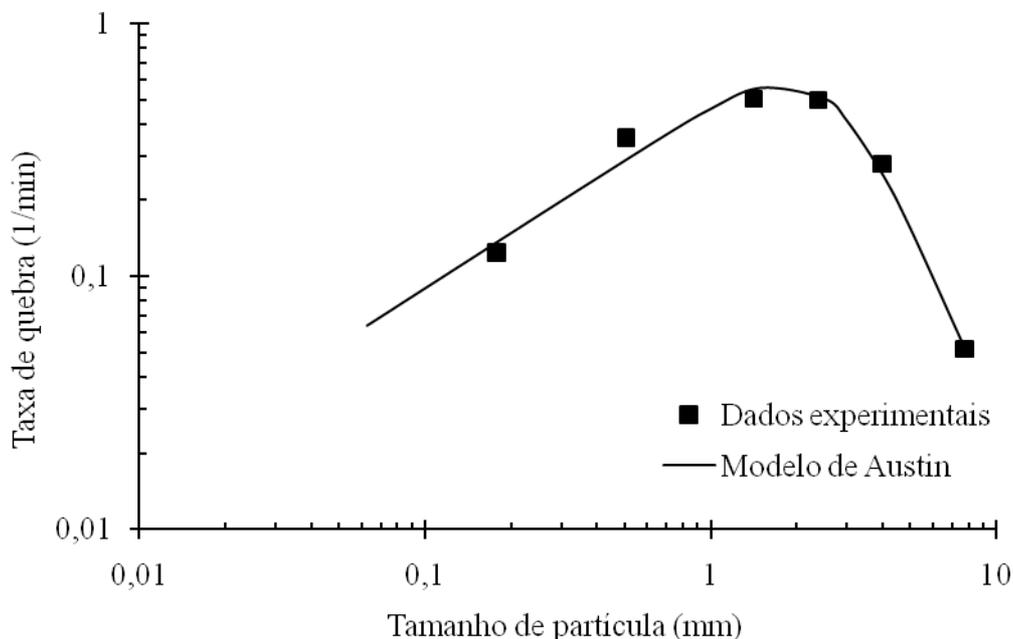


Figura II-1. Ajuste do modelo de Austin para dados experimentais da função seleção de minério de cobre.

A curva da Figura II-1 pode ser ajustada pela Equação II-14, que é a função proposta por Austin (Austin et al., 1984)

$$S_i = \frac{S_1 x_i^\eta}{1 + \left(\frac{x_i}{\mu}\right)^\Lambda} \quad \text{Equação II-14}$$

sendo x_i o tamanho de partícula, η e Λ parâmetros que são função somente do material específico e S_1 e μ parâmetros que dependem da escala geométrica, sendo S_1 o valor da função seleção para um tamanho de partícula $x_i = 1\text{mm}$. A função seleção para o modelo de Austin geralmente tem unidades de min^{-1} .

Os parâmetros da função de Austin podem ser obtidos facilmente a partir de experimentos de moagem em batelada no laboratório, bem como do uso de técnicas de estimação de parâmetros pelas distribuições granulométricas de amostras retiradas dos fluxos da alimentação e descarga de um moinho industrial (King, 2001), denominada retro-cálculo.

II.3.2 Função quebra

A fratura primária se define como a geração de partículas filhas no primeiro evento de fratura de um conjunto de partículas contidas em um monotamanho, sem que as partículas filhas sejam fraturadas novamente.

A distribuição granulométrica da fratura primária pode ser descrita de duas formas. A primeira consiste em definir o parâmetro $b_{i,j}$ que representa a fração do material inicial de monotamanho j que passou ao novo tamanho i , sendo que $n \leq i \leq j$. A fratura primária produz uma distribuição com vários tamanhos de partícula i , porém para a descrição da fratura dos tamanhos de interesse se precisa de uma matriz contendo os elementos $b_{i,j}$. A Figura II-2 ilustra a definição da distribuição de fratura primária ou função quebra.

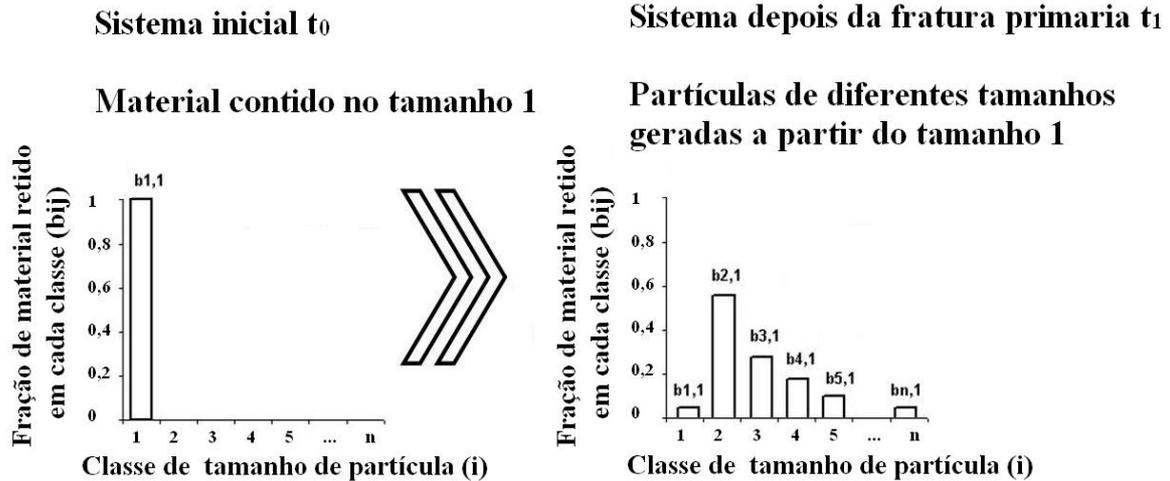


Figura II-2. Distribuição de tamanhos de um material monotamanho depois da fratura primária.

A segunda forma de representar a distribuição das partículas filhas é calcular o valor B_{ij} que é o acumulado dos valores de b para o tamanho j .

$$B_{i,j} = b_{n,j} + b_{n-1,j} + \dots + b_{i,j} = \sum_{k=i}^n b_{k,j} \quad \text{ou tambem} \quad \text{Equação II-15}$$

$$b_{i,j} = B_{i,j} - B_{i+1,j}$$

II.3.2.1 Modelo empírico da função quebra

A relação da distribuição granulométrica da fratura primária contra a fração do tamanho de fratura adimensional x_i/x_j pode ser expressa na forma cumulativa B_{ij} numa escala logarítmica (Figura II-3).

Segundo a evidência empírica, os valores da função quebra não são sensíveis às condições de moagem como o a massa de material dentro do moinho (*hold-up*), a carga de corpos moedores e o diâmetro do moinho. Na prática isso quer dizer que a média da ação de fratura efetuada por um choque entre duas bolas dentro de um moinho é igual para moinhos de diferentes diâmetros e operando sob diferentes condições (Austin e Concha, 1993).

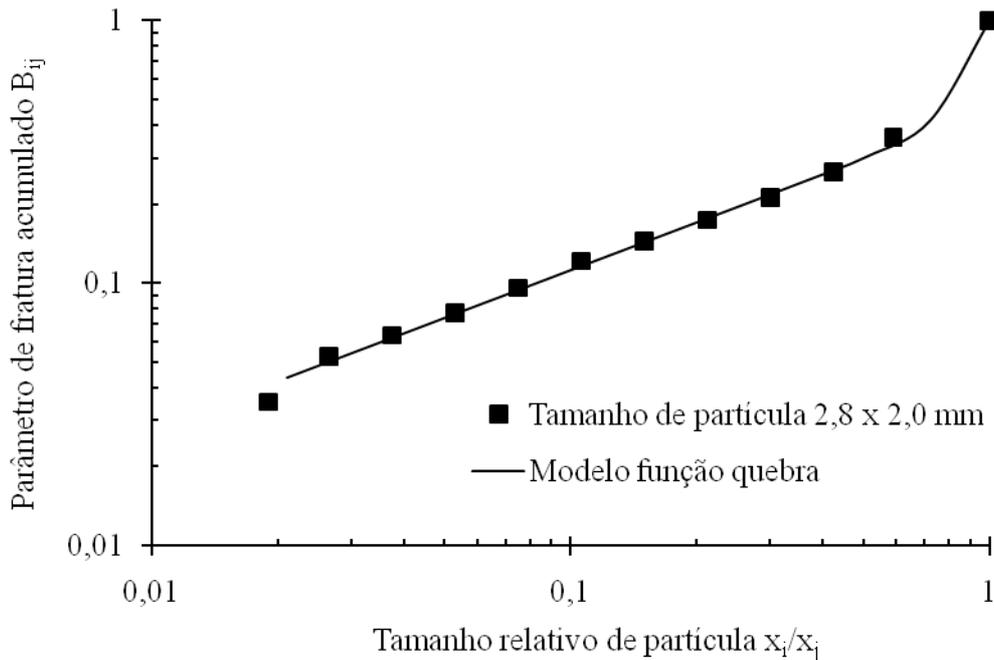


Figura II-3. Modelo da função quebra para a distribuição acumulada da fratura primária das partículas na faixa de 2,8 x 2,0 mm de amostra de minério de cobre.

Os valores B_{ij} podem ser ajustados a uma função empírica (Equação II-16) constituída por duas linhas retas no plano logarítmico. A geometria da função fornece informações cruciais referentes ao papel que cada um dos parâmetros da equação exerce e também fornece um método bastante conveniente para a estimativa dos parâmetros quando dados experimentais estão disponíveis.

$$B_{ij} = \Phi \left(\frac{x_{i-1}}{x_j} \right)^{n_1} + (1 - \Phi) \left(\frac{x_{i-1}}{x_j} \right)^{n_2}, \quad 0 \leq \Phi \leq 1, \quad i > j \quad \text{Equação II-16}$$

sendo Φ , n_1 , n_2 , constantes do modelo. O primeiro termo da Equação II-16 fornece a contribuição das partículas finas geradas pela aplicação de esforços compressivos nos pontos de contato entre as partículas e os corpos moedores, enquanto que o segundo termo da expressão é responsável pela contribuição de partículas grosseiras geradas pelo surgimento de esforços de tração internos à partícula.

Dentre os métodos experimentais para a determinação da função quebra, o mais utilizado consiste na realização de ensaios de moagem em batelada em tempos bastante

curtos, com um material previamente classificado em uma faixa estreita de tamanhos. Esse procedimento visa garantir que eventos secundários de fratura sejam minimizados, de maneira que a distribuição granulométrica resultante possa ser correlacionada com a função quebra cumulativa B_{ij} .

Outro método consiste na calibração dos parâmetros da função quebra a partir de dados de distribuição granulométrica de ensaios de moagem em batelada com tempos variados de moagem, utilizando a solução do modelo de balanço populacional para a moagem descontínua e um procedimento de retro-cálculo.

II.3.2.2 Balanço de massa por classes para a moagem descontínua

Em resumo, a velocidade de produção das partículas do tamanho i a partir das partículas do tamanho j é igual à fração b_{ij} de partículas que passaram do tamanho j ao tamanho i , multiplicada pela velocidade de quebra das partículas do tamanho j . A Equação II-17 expressa a velocidade de produção em termos de S_i e b_{ij} .

$$\frac{d[Ww_i(t)]}{dt} = b_{i,j} S_j Ww_j \quad \text{Equação II-17}$$

A Equação II-18 mostra o balanço de massa por tamanhos para a moagem descontínua com base nos parâmetros de fratura S_i e b_{ij} . A Equação II-19 é uma forma mais compacta do balanço de massa.

$$\frac{d[Ww_i(t)]}{dt} = [b_{i,1} S_1 Ww_1(t) + b_{i,2} S_2 Ww_2(t) + \dots + b_{i,i-1} S_{i-1} Ww_{i-1}(t)] - [S_i Ww_i(t)] \quad \text{Equação II-18}$$

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = -S_i w_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{i-1} b_{ij} S_j w_j(t) \quad , \quad n \geq i \geq j \geq 1 \quad \text{Equação II-19}$$

Para o caso da primeira classe de tamanhos, a Equação II-19 é equivalente à Equação II-12.

II.3.2.3 Balanço de massa por classes para a moagem contínua

Na Figura II-4 se tem o esquema de um moinho contínuo perfeitamente misturado. As equações que descrevem o processo de redução de tamanho podem ser deduzidas por meio de um balanço de massas em qualquer classe de tamanhos (King, 2001).

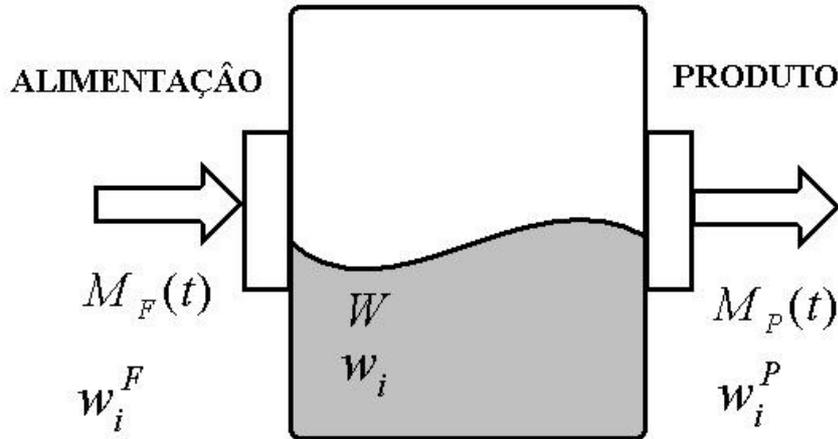


Figura II-4. Esquema do moinho contínuo perfeitamente misturado.

Na Equação II-20 se tem o balanço de massa do moinho, sendo W a massa que está dentro do moinho, que também é denominada “*hold-up*”, $M_F(t)$ e $M_P(t)$ são as vazões mássicas da alimentação e do produto, e w_i^F , w_i^P e w_i são as frações mássicas da classe i na alimentação, no produto e no *hold-up*.

$$\frac{d[Ww_i(t)]}{dt} = M_F(t)w_i^F - M_P(t)w_i^P \quad \text{Equação II-20}$$

Para o caso da moagem contínua, a vazão de produto é igual à da alimentação e não se tem acumulação de massa no interior do moinho:

$$\frac{d[Ww(x,t)]}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad M_F(t) = M_P(t) = M \quad \text{Equação II-21}$$

O balanço de massa final do moinho contínuo na classe i considera a Equação II-20 e a Equação II-21, que representam as partículas de classe i que entram e saem do moinho. A Equação II-18 considera as partículas da classe i geradas pela fragmentação

de partículas maiores no interior do moinho da classe j e também as partículas da classe i que são fragmentadas e deixam essa classe.

$$Mw_i^P + S_i W w_i(t) = Mw_i^F + W \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} S_j w_j(t) \quad \text{Equação II-22}$$

Saida de material da classe i com o Produto	+	Quebra de material da classe i que pasa a outras classes	=	Entrada de material da classe i com a Alimentação	+	Geração de material da classe i a partir da classe j
---	---	--	---	---	---	--

No moinho perfeitamente misturado se tem que a fração mássica w_i^P que sai com o produto é igual à fração do *hold-up* w_i . Por ultimo, se define o tempo de residência τ como a razão entre o volume do *hold-up*, e a vazão de material que entra no moinho.

$$w_i(t) = w_i^P, \quad w_j(t) = w_j^P \quad e \quad \tau = W/M \quad \text{Equação II-23}$$

A Equação II-24 é a expressão que se usa para calcular a fração mássica da classe i que sai no produto do moinho contínuo perfeitamente misturado.

$$w_i^P = w_i^F + \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} S_j \tau w_j^P - S_i \tau w_i^P$$

$$w_i^P = \frac{w_i^F + \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} S_j \tau w_j^P}{1 + S_i \tau} \quad \text{Equação II-24}$$

Na Equação II-25 se tem a solução para as classes 1 e 2.

$$w_1^P = \frac{w_1^F}{1 + S_1 \tau}, \quad \text{Classe 1}$$

$$w_2^P = \frac{w_2^F + b_{2,1} S_1 \tau w_1^P}{1 + S_2 \tau}, \quad \text{Classe 2} \quad \text{Equação II-25}$$

II.3.3 Escalonamento de moinhos usando a função seleção de Austin

Para escalonar um moinho com ajuda do modelo do balanço populacional é necessário fazer uma distinção entre os parâmetros que dependem somente do material e aqueles que dependem tanto do material quanto da escala geométrica do moinho que será utilizado. No modelo de Austin os parâmetros η e λ para a função seleção S_i são usualmente considerados como sendo função somente do material específico enquanto S_1 e μ dependem da escala geométrica (King, 2001).

Com o objetivo de utilizar este modelo para a simulação de moinhos de maiores diâmetros é necessário o emprego de algumas expressões de escalonamento que descrevem como os parâmetros do modelo de Austin se alteram com as variações do tamanho e do ambiente no interior do moinho. As variáveis dominantes são o diâmetro do moinho D e o tamanho das bolas que compõem a carga moedora d . Estas variáveis juntas determinam a energia de impacto média no moinho e ambas têm uma importância significativa no valor de S_1 na Equação II-14.

Tendo em vista que a função seleção essencialmente descreve a cinética da moagem, os seus valores evidentemente crescem com o número de impactos que ocorrem por segundo por unidade de volume em um moinho. Na Figura II-5 é apresentado o esquema do moinho de bolas no estado estacionário. Moinhos geometricamente similares e que têm o mesmo grau de enchimento J e a mesma fração da velocidade crítica φ_c irão produzir impactos por unidade de volume com uma frequência praticamente idêntica. A frequência de impactos por unidade de volume deveria variar em um taxa proporcional à velocidade de rotação. A variação da frequência de impactos com o enchimento do moinho é mais complexa e leis de escalonamento puramente empíricas precisam ser utilizadas (King, 2001).

Outro parâmetro importante dentro do escalonamento é o efeito do enchimento intersticial U , o qual é modelado empiricamente para refletir o fato que nem todo o material permanece na região do moinho onde os impactos enérgicos ocorrem. Parte desse material pode, por exemplo, estar numa cavidade do revestimento do moinho e com isso distante dos impactos que poderiam levar à quebra das partículas.

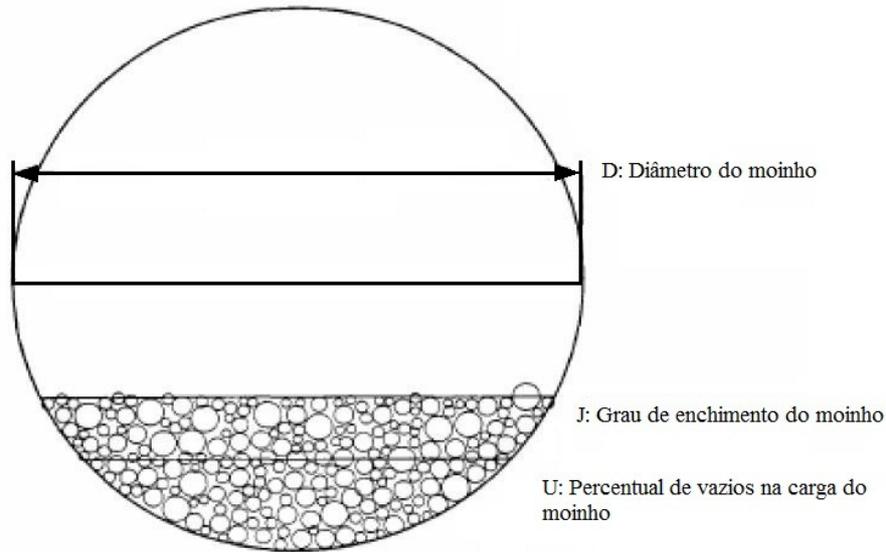


Figura II-5. Esquema de um moinho de bolas em estado estacionário, com a representação dos parâmetros geométricos usados no escalonamento (King, 2001).

A relação de escalonamento para o parâmetro S_1 é dada pela Equação II-26, o subscrito T na mesma equação refere-se à variável determinada em condições de testes em laboratório para o qual os parâmetros são estimados e a variável correspondente sem este subscrito refere-se ao moinho em escala industrial a ser simulado.

$$\frac{S_1}{S_{1T}} = \left(\frac{D}{D_T} \right)^{M_1} \left(\frac{1 + 6,6J_T^{2,3}}{1 + 6,6J^{2,3}} \right) \left(\frac{\varphi_c - 0,1}{\varphi_{cT} - 0,1} \right) \left(\frac{1 + \exp[15,7(\varphi_{cT} - 0,94)]}{1 + \exp[15,7(\varphi_c - 0,94)]} \right) \cdot \exp[-c(U - U_T)] \quad \text{Equação II-26}$$

A distribuição de tamanhos da carga moedora também influencia a taxa específica de quebra. Bolas menores produzem menos energia de impacto e cada impacto influencia um número menor de partículas nas vizinhanças do ponto de impacto entre duas bolas quaisquer. A zona ativa de moagem de materiais entre as bolas é obviamente menor com bolas menores. As bolas menores são também menos

eficientes na fratura de partículas maiores. Balanceando estes efeitos que tendem a reduzir a taxa específica de quebra, há um aumento da frequência de impactos em função do aumento do número de bolas menores no moinho. O número de bolas por unidade de volume varia com $1/d^3$, sendo d o diâmetro da bola. O resultado líquido do confronto desses efeitos é revelado pela execução de experimentos que demonstram que a taxa específica de quebra pode ser escalonada como $1/d^n$ onde n é aproximadamente igual a 1 no ponto em que o tamanho da partícula corresponde à máxima taxa específica de quebra e este tamanho da partícula cresce na proporção direta do tamanho da bola. O parâmetro μ que define o tamanho da partícula com a máxima taxa específica de quebra, cresce com o tamanho das bolas com uma potência próxima a 1 e também demonstra uma dependência da potência associada ao diâmetro do moinho. Moinhos industriais sempre utilizam uma distribuição de tamanhos de corpos moedores e, para adequarmos este escalonamento, é necessário que seja realizada uma análise levando em consideração a fração mássica de bolas em cada tamanho.

$$S_i = S_1 x_i^\eta \sum_k \frac{m_k \left(\frac{d_T}{d_k} \right)^{N_0}}{1 + \left(\frac{x_i}{\mu_k} \right)^\Lambda} \quad \text{Equação II-27}$$

sendo d_k o diâmetro representativo da classe de tamanhos de bola k e m_k a fração mássica do tamanho de bola da classe k na carga de corpos moedores. O parâmetro μ_k é dado pela expressão:

$$\frac{\mu_k}{\mu_{kT}} = \left(\frac{D}{D_T} \right)^{N_2} \left(\frac{d_k}{d_T} \right)^{N_3} \quad \text{Equação II-28}$$

Os valores recomendados para os parâmetros das equações anteriores são $N_0 = 1,0$, $N_1 = 0,5$, $N_3 = 1,0$ e $c = 1,3$. Tem sido observado que moinhos que utilizam bolas de tamanhos grandes têm operado com tamanha ineficiência que é freqüentemente recomendado que S_1 deveria ser escalonado por um fator $(3,81/D)^{0,2}$ quando o diâmetro do moinho é maior que 3,81 metros (King, 2001).

II.3.4 Escalonamento usando o modelo de Herbst e Fuerstenau para a taxa específica de quebra

O método de escalonamento desenvolvido por Herbst e Fuerstenau (1980) é baseado na variação da taxa de quebra e da função distribuição de quebra com as condições de operação do moinho de bolas, as quais podem ser descritas pela variação destas funções com a energia específica e as condições de operação usadas no moinho. A taxa específica de quebra da classe i é proporcional à potência líquida específica que é aplicada à carga do moinho (King, 2001):

$$S_i = S_i^E \frac{P}{W} \quad \text{Equação II-29}$$

sendo P a potência (energia) que o moinho consome, excluindo a potência consumida por perdas mecânicas ou por atrito, W é a massa da carga do moinho S_i^E é a taxa de quebra específica de energia para partículas na classe i .

A proposta principal de Herbst e Fuerstenau é que o modelo da função S_i^E só depende do material e não varia com as dimensões ou condições de operação do moinho. A variação da taxa de quebra específica com o tamanho de partícula é dada por:

$$\ln\left(\frac{S_i^E}{S_1^E}\right) = \zeta_1 \ln\left(\frac{d_{pi}}{d_{p1}}\right) + \zeta_2 \left[\ln\left(\frac{d_{pi}}{d_{p1}}\right)\right]^2 + \dots \quad \text{Equação II-30}$$

A Equação II-30 representa a taxa específica de energia de quebra como uma série logarítmica em função do tamanho de partícula. Usualmente só se usam os dois primeiros termos desta série. Com os dados experimentais se faz um gráfico da taxa específica de quebra versus tamanho de partícula, do qual se obtêm os parâmetros da função. Os valores dos parâmetros S_i^E e d_{p1} se estabelecem como um ponto de referência e as constantes ζ_1 e ζ_2 se calculam graficamente.

II.4 Modelagem mecanicista

Devido às limitações do modelo do balanço populacional, na década de 80 se começaram a desenvolver pesquisas para melhorar o entendimento dos processos de cominuição. O principal objetivo foi encontrar a relação entre as funções definidas no balanço populacional e os microprocessos que acontecem com as partículas dentro do ambiente da moagem.

Em geral a cominuição tem sido estudada do ponto de vista da quebra de partículas individuais como seu processo mais elementar. Os estudos de quebra de partículas individuais realizados nas décadas de 1960 a 1980 (Schönert, 1988^a) auxiliaram muito na compreensão da influência das propriedades do material e das condições de carregamento na aplicação dos esforços na deformação e fratura de partículas individuais. Na década de 1990, pesquisadores da Universidade de Utah pesquisaram ativamente sobre importantes características do comportamento mecânico de partículas individuais, tais como a energia usada na fratura, a resistência das partículas e a rigidez das partículas utilizando a Célula de Carga de Impacto (CCI) (Tavares e King, 1998). Além disso, o estudo da quebra de partículas individuais tem se mostrado muito importante na modelagem matemática dos processos de cominuição industrial, com exemplos recentes na literatura (Tavares e Carvalho, 2009; Lichter et al., 2009). Entretanto, uma descrição mais fiel do que realmente acontece dentro dos

equipamentos de moagem e britagem requer o entendimento e a descrição quantitativa da fratura de partículas quando elas se encontram formando leitos.

Junto com os avanços nas técnicas de caracterização de partículas, se desenvolveu a aplicação do Método dos Elementos Discretos (DEM – *Discrete Element Method*), o que ajudou muito no entendimento do movimento das partículas e dos corpos moedores no interior dos equipamentos de cominuição.

Estes avanços na avaliação das propriedades dos materiais e dos equipamentos de moagem permitiram desenvolver vários modelos matemáticos que envolvem conceitos como a energia de quebra de partículas, o espectro de energia dos corpos moedores dentro do moinho, a probabilidade de quebra de um material e o dano que sofre uma partícula depois de repetidos impactos.

II.4.1 Mecanismos de quebra na redução de partículas

Devido às limitações do modelo do balanço populacional, Cho (1987) desenvolveu uma relação entre as funções quebra e seleção como uma ponderação em função da magnitude e da frequência das energias de impacto no interior do moinho de bolas. No trabalho de Cho foi estudado o comportamento de partículas individuais e em leitos de uma ou mais camadas quando se aplica uma carga sobre estas. As cargas aplicadas incluíram desde a compressão lenta, até o impacto de uma esfera em queda livre, simulando o ambiente no interior de um moinho (Cho, 1987). Nos ensaios de impacto em leitos posicionados entre corpos moedores esféricos, Cho propôs que as partículas que recebem os esforços se encontram em uma zona de carregamento, a qual é função da geometria dos corpos moedores e das propriedades do material.

No modelo assume-se que cada nível de energias de impacto possua uma função de distribuição de quebra equivalente. A função quebra efetiva do moinho de bolas é a soma de todas as funções quebra obtidas para cada nível energético:

$$B_M(p) = \sum_e f(e)B_d(e, p) \quad \text{Equação II-31}$$

sendo B_M a função quebra para o moinho de bolas na forma acumulada, $f(e)$ a fração do e -ésimo nível energético no espectro de energias de impacto no moinho de bolas e $B_d(e, p)$ a função quebra obtida por meio de ensaios de impacto em leitos de partícula.

Para a função seleção se aplicou um raciocínio similar. Considerando a Equação II-13 que representa a taxa de quebra de primeira ordem para um moinho de bolas descontínuo, Cho adicionou o termo de energia específica aplicada \bar{E} .

$$w_1(t) = w_1(0) \exp(-S_1^E \cdot \bar{E}) \quad \text{Equação II-32}$$

$$\bar{E} = \sum_e \frac{f(e)E(e)}{w_1^e} \quad \text{Equação II-33}$$

sendo $E(e)$ a energia associada ao índice do nível energético e e w_1^e a fração mássica da classe 1 que quebro devido à aplicação da energia $E(e)$. A expressão final é dada pela Equação II-34.

$$w_1(\bar{E}) = w_1(0) \exp\left(-S_1^E \cdot \sum_e \frac{f(e)E(e)}{w_1^e}\right) \quad \text{Equação II-34}$$

A maior limitação que encontrou o modelo do Cho foi que, na época em que foi desenvolvido, era difícil determinar o espectro de energias de impacto dentro de um moinho de bolas.

Já na década de 1990, Höfler e Herbst (Höfler e Herbst, 1990) contornaram a limitação da determinação do espectro de energias de impacto, via retro-cálculo a partir dos dados de entrada e saída do modelo matemático do moinhos de bolas. Höfler e Herbst também compararam os ensaios de quebra de partículas individuais usando o pendulo duplo com os ensaios de quebra de leitos não-confinados usando a célula de carga de impacto (CCI), concluindo que a quebra de leitos descreve melhor o microprocesso que acontece dentro dos moinhos de bolas. Os autores concluíram que a

altura da zona de carregamento não é maior que a espessura de duas camadas de partículas, bem como que a função quebra dos leitos não dependia do número de camadas ou do diâmetro do corpo moedor. Assim, os autores propuseram que a massa de material que quebra no leito somente depende da energia de impacto, e não do número de camadas ou do diâmetro dos corpos moedores, considerando bolas de aço com diâmetros no intervalo de 40 a 55mm.

II.4.2 Modelo de moagem em função do espectro de energias de impacto

Na década de 1990 começou a aplicação do método dos elementos discretos (*Discrete Element Method*) nos processos de cominuição, para a modelagem do movimento das partículas e dos corpos moedores no interior dos moinhos. Os primeiros autores que aplicaram esta metodologia foram Mishra e Rajamani (Mishra, 1991; Mishra e Rajamani, 1992). A aplicação do DEM nos processos de cominuição começou pela necessidade de compreender como a energia é distribuída dentro dos equipamentos de cominuição. A medição direta das tensões geradas pelos corpos moedores dentro do moinho é muito difícil, pois o moinho é um ambiente extremamente agressivo e quaisquer sensores usados sofrem impactos em queda livre de esferas de aço até de 10 metros de altura.

O DEM permite modelar o movimento dos sólidos utilizando as leis de movimento de Newton. Esta ferramenta torna possível simular em detalhe os choques individuais entre as partículas e os corpos moedores ou até mesmo visualizar e medir os esforços envolvidos nestas colisões. Na Figura II-6 se tem a comparação da operação de um moinho de laboratório com uma parede lateral transparente e a simulação em DEM.

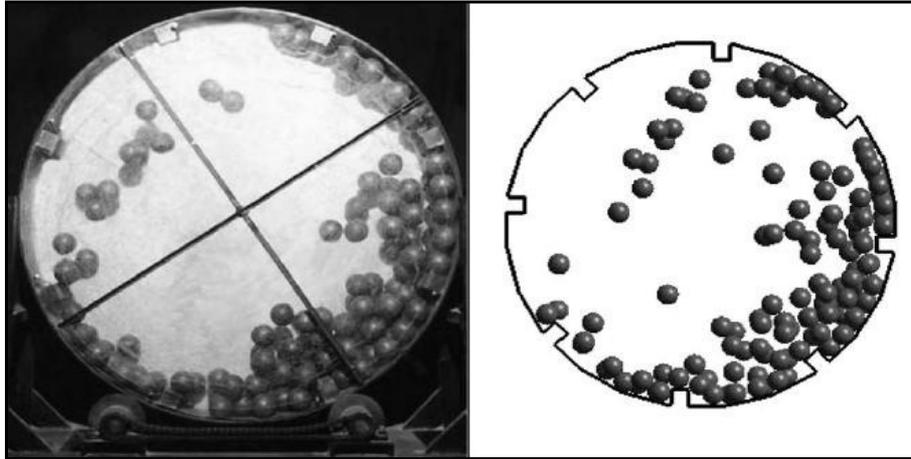


Figura II-6. Comparação do movimento da carga de corpos moedores no interior de um moinho operando a 70% da velocidade crítica com enchimento de 20%, na esquerda se tem o experimento no laboratório e na direita a simulação por DEM (Rajamani et al., 2000).

A simulação por DEM é sensível à mudança de parâmetros operacionais e de projeto, tais como o grau de enchimento, o revestimento ou a velocidade de rotação do moinho. No contexto de modelagem e dimensionamento de equipamentos, a principal vantagem da simulação em DEM é fornecer o histórico e magnitude das colisões que ocorrem no meio de moagem durante certo intervalo de tempo, traduzido pelo espectro de energias de impacto (Figura II-7).

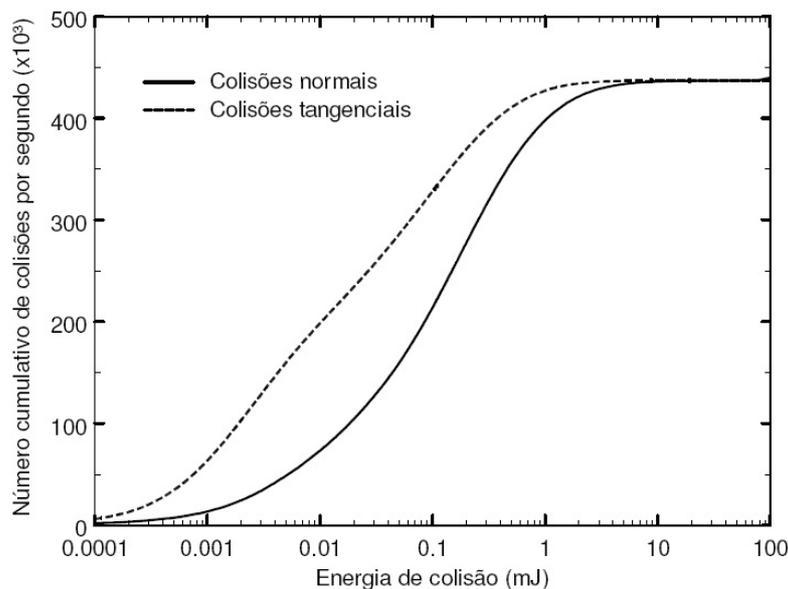


Figura II-7. Espectro de energias de impacto de moinho de bolas de 30 cm de diâmetro com corpos moedores de 25 mm, grau de enchimento de 30 %, operando a 54 rpm (Tavares e Carvalho, 2009).

O primeiro modelo desenvolvido que incorpora a informação dada pela distribuição da energia das colisões dentro do moinho foi desenvolvido por Datta na Universidade de Utah. No modelo a distribuição de energias de impacto foi calculada usando o DEM, e foi avaliado com uma serie de experimentos no laboratório (Datta, 1998). Com este trabalho, Datta observou que os espectros de energias para diferentes tamanhos de moinhos estabelecendo os parâmetros operacionais fixos, variam levemente.

O modelo proposto por Datta considera que o material ao entrar no moinho é distribuído em classes de tamanho e também em classes de energia de acordo com o espectro de energias de impacto (Figura II-8). Para uma classe de tamanho i a taxa de desaparecimento é dada pela Equação II-35:

$$\text{Taxa de desaparecimento no tempo } t = \lambda_k r_{i,k} w_i(t) \quad \text{Equação II-35}$$

sendo $\lambda_k w_i(t)$ o termo que indica que uma parte do numero total de impactos de um determinado nível de energia k é efetivo na quebra de partículas de tamanho i , $w_i(t)$ a fração mássica de material na classe i no instante de tempo t e $r_{i,k}$ é a fração mássica das partículas pertencentes á classe i que quebram devido à colisão de nível de energia k .

A taxa de geração de material na classe de tamanho i é dada pela Equação II-36:

$$\text{Taxa de geração no tempo } t = \lambda_k r_{j,k} b_{ij,k} w_j(t) \quad \text{Equação II-36}$$

sendo $b_{ij,k}$ a função quebra que descreve o aparecimento de partículas na classe i a partir de partículas na classe j no nível energético k e $r_{i,k}$ a fração mássica das partículas pertencentes á classe j que quebram devido a colisão de nível de energia k . Datta estendeu esta idéia e apresentou um modelo para um moinho de bolas operando em batelada, aplicando o modelo do balanço populacional:

$$\frac{dw_i}{dt} = -\sum_{k=1}^N \lambda_k r_{i,k} w_i(t) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_k r_{j,k} b_{ij,k} w_j(t) \quad \text{Equação II-37}$$

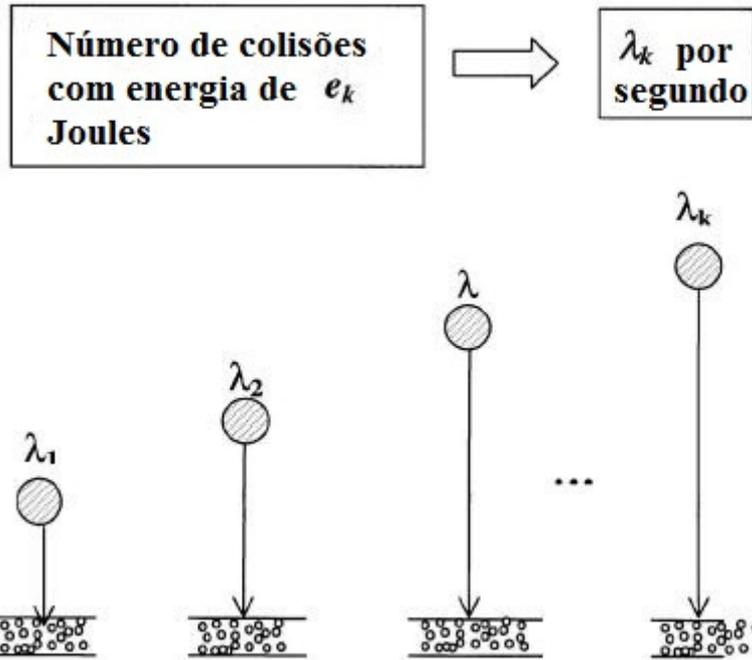


Figura II-8. Fenômeno de moagem no interior de um moinho de bolas interpretado em termos de colisões (Datta, 1998).

Para a determinação das funções $b_{ij,k}$ e $w_i(t)$, Datta usou uma célula de carga de impacto similar àquela que foi usada por Bourgeois (1993). As variáveis mais importantes dentro desta metodologia experimental são: o diâmetro do corpo moedor, a configuração do leito de partículas, e a geometria das superfícies que comprimem o leito.

II.4.3 Modelagem de quebra de leitos de partículas

A fim de melhor compreender as pesquisas realizadas na área, é necessário primeiro introduzir algumas definições. Schönert (1996) define o termo “leito de partículas” como o arranjo de partículas no qual ocorrem contatos partícula/partícula direcionados perpendicularmente à superfície responsável pela aplicação dos esforços, sendo que o número de camadas considerado no leito é estimado pela divisão de massa total do leito, pela massa de uma única camada de partículas. Os leitos de partículas podem se apresentar como monodispersos, que são aqueles formados por partículas cujos tamanhos são limitados por uma faixa granulométrica estreita; e polidispersos, os

quais são formados por partículas que não apresentam restrição quanto à sua distribuição granulométrica. Leitos podem ainda se apresentar confinados ou não-confinados.

Adicionalmente Schönert propôs classificar o arranjo de partículas em quatro grupos principais como se pode observar na Figura II-9: a) partícula individual, b) monocamada (camada de uma partícula), c) leito de partículas e d) leito de partículas ideal.

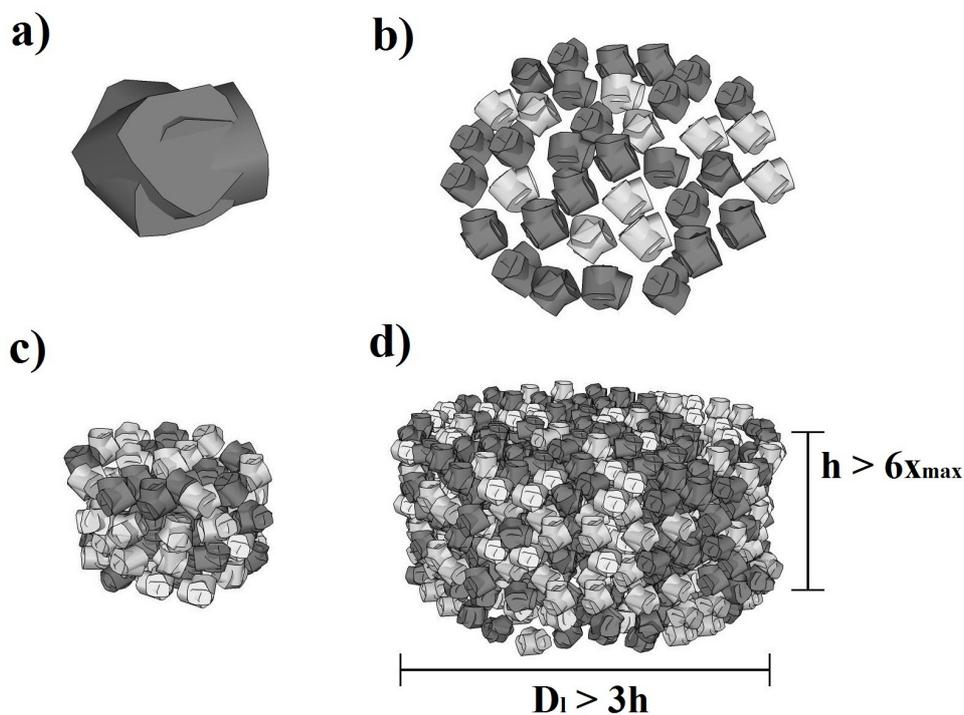


Figura II-9. Classificação dos leitos de partículas segundo Schönert: a) partícula individual, b) monocamada (camada de uma partícula), c) leito de partículas e d) leito de partículas ideal.

O “leito ideal” é definido como aquele que apresenta estrutura e compacidade homogêneas e que responde aos esforços aplicados de maneira que os efeitos de parede na quebra de partículas podem ser considerados desprezíveis. Inclusive, ele propôs que, para que esta condição seja satisfeita, a altura h e o diâmetro do leito D_1 devam obedecer às restrições $h > 6 x_{max}$ e $D_1 > 3 h$ para o caso de leitos cilíndricos, sendo x_{max} o tamanho máximo de partículas do leito.

Na década de 1980, Schönert 1988 publicou um dos primeiros trabalhos sobre a quebra de leitos de partículas. Nele o autor classifica a aplicação dos esforços dentro dos equipamentos de cominuição em dois grupos: carregamento por compressão lenta, como no caso da compressão em prensa de rolos, e o carregamento por impacto rápido, como no caso do impacto de um corpo moedor em um moinho de bolas. Adicionalmente, ele também reconheceu que, quando um leito não-confinado é submetido a esforços em um equipamento de cominuição, algumas das partículas são projetadas, escapando da área efetiva de compressão (ou zona de carregamento). A fim de explicar melhor este fenômeno, Schönert desenvolveu uma expressão matemática para o cálculo do volume ativo, que é o volume de partículas do leito que é impactado pelo choque de duas bolas ou pela compressão de dois rolos (Figura II-10).

$$V_A = \left(\frac{\pi}{4}\right)h(\alpha_0 d)^2 \quad \text{Equação II-38}$$

sendo h a altura do volume ativo, d o diâmetro da bola ou do rolo e α_0 o ângulo entre o eixo da bola e o perímetro do volume ativo. A função V_A é válida só para α_0 pequenos, além disso, os parâmetros α_0 e h são determinados experimentalmente. Adicional ao anterior, o modelo depende fortemente das propriedades físicas, da granulometria e do efeito dos pontos de contato nas partículas do leito.

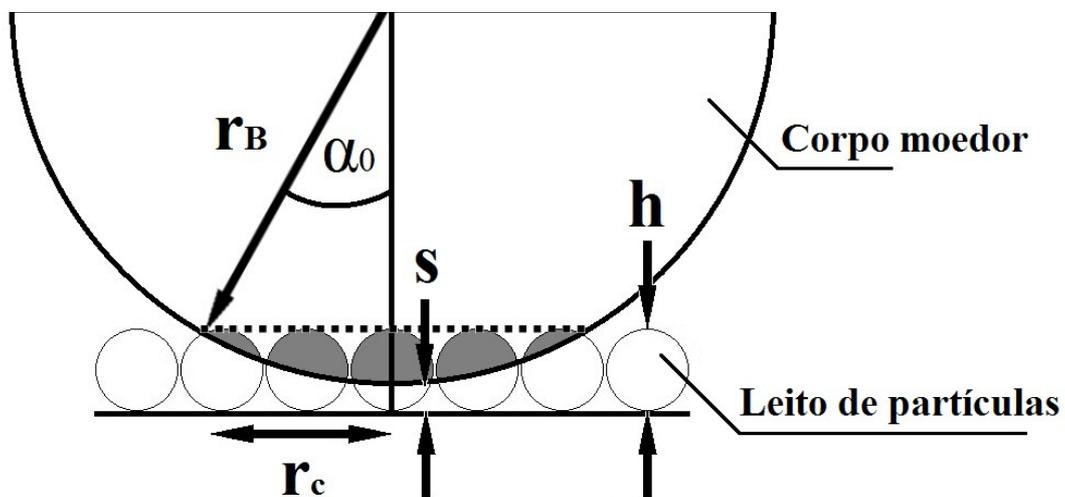


Figura II-10. Esquema do impacto de um corpo moedor sobre um leito de partículas.

Mais tarde, Bourgeois (1993) propôs um modelo de probabilidade radial de fratura que descreve o comportamento dos leitos não-confinados quando são impactados por corpos moedores. O objetivo principal desse modelo era prever a quebra de leitos com partículas contidas em um único tamanho (leitos monodispersos), a partir de informações da quebra de partículas individuais e da caracterização de leitos compostos por uma monocamada.

Bourgeois realizou ensaios de quebra de leitos por impacto para auxiliar nessa compreensão da distribuição da energia de impacto absorvida pelas partículas em função da posição relativa destas, com respeito ao impacto do corpo moedor e à configuração das partículas no leito. Na Figura II-11 pode-se ver a configuração hexagonal de um leito ideal de partículas, usada por Bourgeois. Nesta configuração as partículas se encontram densamente empacotadas formando círculos concêntricos. Além do arranjo de partículas densamente empacotado, Bourgeois considera a densidade de partículas com a posição radial r das partículas no leito.

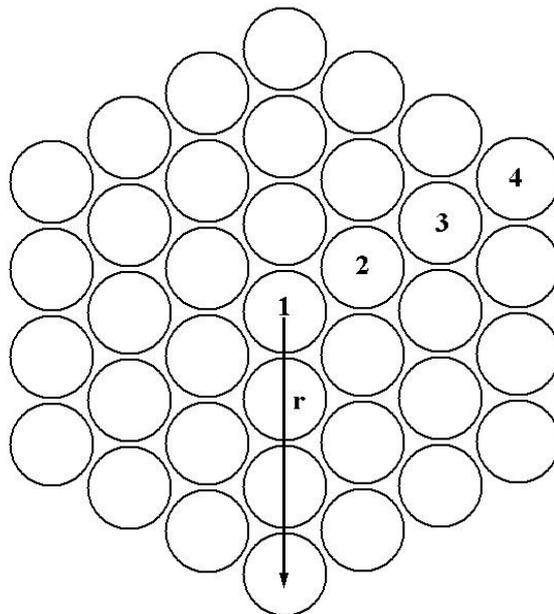


Figura II-11. Arranjo hexagonal densamente empacotado de uma monocamada de partículas (Bourgeois, 1993).

A Figura II-12 apresenta um esquema do impacto de um corpo moedor no leito. Bourgeois concluiu que as partículas que se situam na região central da zona de carregamento R_0 têm maior probabilidade de serem fraturadas, pois absorvem uma maior proporção da energia de impacto, enquanto partículas posicionadas mais próximas à periferia da zona de carregamento têm menor probabilidade de serem fraturadas. Alguns desses conceitos propostos por Bourgeois foram resgatados e implementados no modelo mecanicista da moagem, recentemente desenvolvido por Tavares e Carvalho (2009).

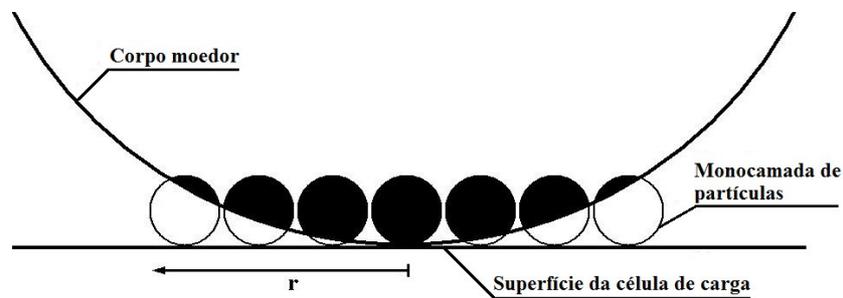


Figura II-12. Geometria de interseção entre o corpo moedor esférico e as partículas do leito, a razão de diâmetro entre a bola e as partículas é de 1:20 (Bourgeois, 1993).

Diversos estudos também têm sido realizados visando descrever a quebra de partículas em leitos confinados. Evertsson e Bearman (1997) modelaram empiricamente resultados de ensaios de compressão de leitos polidispersos de partículas como base para a modelagem mecanicista de britadores cônicos operando com câmara cheia.

Schönert e seu grupo na Universidade de Clausthal realizaram diversos estudos que trataram da modelagem matemática da prensa de rolos (*High-Pressure Grinding Rolls - HPGR*) (Schönert, 1988^c). Inclusive, a inspiração de Schönert para o desenvolvimento dessa tecnologia inovadora teria vindo dos seus vários anos de estudo da quebra de partículas individuais e em leitos. Liu e Schönert (1996) desenvolveram um modelo para a previsão da quebra de partículas em leitos polidispersos, a partir de informações de quebra de leitos monodispersos. O modelo propôs que a interação entre

as partículas de diferentes tamanhos é quantificada por uma função de repartição de energia, que expressa a distribuição de energia mecânica aplicada entre partículas de diferentes tamanhos presentes no leito. Nos ensaios, os autores observaram que o campo de tensões que atua sobre uma partícula em um leito depende do número e do arranjo das partículas vizinhas, de maneira que a probabilidade de quebra de uma partícula grossa é reduzida quando circundada por uma grande quantidade de partículas finas. A partir do conceito de “leitões ideais” proposto por Schönert, Fuerstenau e outros (1996) também estudaram a quebra de diferentes tipos de minérios durante a compressão de leitões confinados, com o objetivo de estudar a influência da pressão de carregamento do leito, da tenacidade do material e do tamanho de partícula na energia absorvida pelo leito e na distribuição granulométrica do produto.

Ainda com o objetivo de fornecer subsídios para a modelagem do HPGR, Oettel e outros (2001) pesquisaram sobre a utilização e a absorção da energia na quebra de leitões realizando ensaios de compressão usando um aditivo, e vários níveis de confinamento. A principal conclusão do trabalho foi que a massa de material capturado, a energia absorvida e a energia utilizada aumentam com o aumento do nível de confinamento do leito. Outra conclusão foi que o uso do aditivo só foi eficaz no caso de leitões parcialmente confinados. Oettel e outros (2002) estudaram em maior profundidade a compressão de leitões não-confinados, observando que a energia absorvida diminui com o aumento da massa do leito. Entretanto, observou-se que a massa de material capturada só dependeu da geometria da superfície de carregamento e não da massa ou da energia utilizada. Esses autores ainda reconhecem que o desenvolvimento de melhores modelos para a compressão em leitões demandará um maior entendimento do que ocorre na zona de carregamento quando se têm partículas finas, bem como o efeito de escoamento das partículas dentro dessa zona.

Dentro da modelagem matemática da quebra de leitos, uma parte importante das pesquisas tem sido desenvolvida utilizando simulações computacionais. Um dos primeiros trabalhos na área foi publicado ainda na década de 1990 (Potapov e Campbell, 1994). A simulação era baseada na premissa de que uma partícula submetida a esforços pode ser representada em duas dimensões por varias pequenas partículas triangulares indeformáveis e inquebráveis. Na Figura II-13, se pode ver um esquema dos elementos discretos que compõem a partícula e os diferentes tipos de contato que podem acontecer. Esta técnica seria, mais tarde, reconhecida como uma variante do método dos elementos discretos (DEM).

A simulação permite imitar, com precisão, experimentos reais, variando propriedades como o modulo de Young, o modulo de Poisson e a energia de fratura. Com este trabalho se conclui que é possível avaliar a mecânica da fratura das partículas com o método dos elementos discretos, sendo a energia de colisão a variável que mais influi na distribuição do tamanho das partículas filhas geradas na colisão.

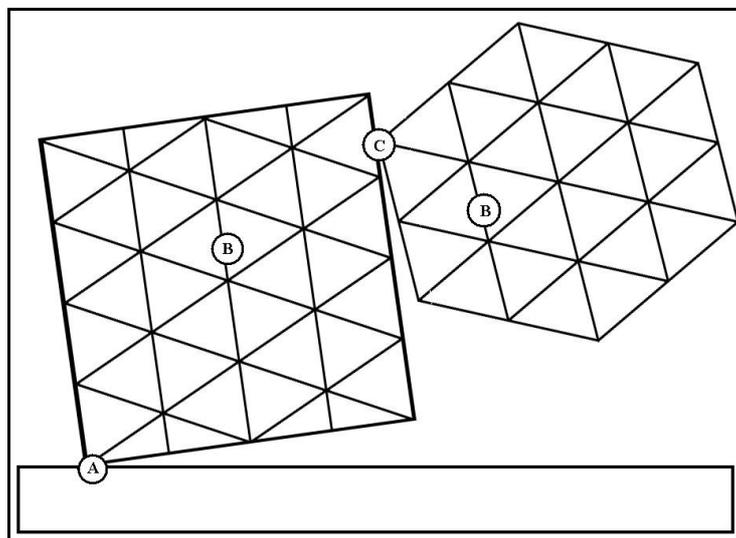


Figura II-13. Colisão entre duas partículas macroscópicas, mostrando a divisão das partículas em elementos com forma de triângulos e os diferentes tipos de contato entre partículas, A) Contato de colisão da partícula com a superfície, B) Contato de união entre dois elementos, C) Contato de colisão entre partículas (Potapov e Campbell, 1994).

Mais recentemente, Tang e colaboradores (2001) também simularam a quebra de uma partícula individual utilizando o DEM, com o auxílio do software RFPA^{2D}. O modelo permitiu identificar a origem da formação da trinca em um ensaio de fragmentação de uma partícula individual, utilizando carregamento lento e sem confinamento da mesma. Os pesquisadores observaram que a trinca não se origina no centro da partícula, mas sim em um local situado entre o centro da partícula e o ponto de carregamento. Na Figura II-14 se pode ver como, à medida que o carregamento continua, novas trincas são geradas. No passo 3 da Figura II-14, as trincas se multiplicam e alcançam a superfície da partícula, ocorrendo uma queda abrupta da energia e a quebra da partícula. No passo 4 se pode observar que o carregamento continua e ocorrem novas fraturas, gerando partículas menores.

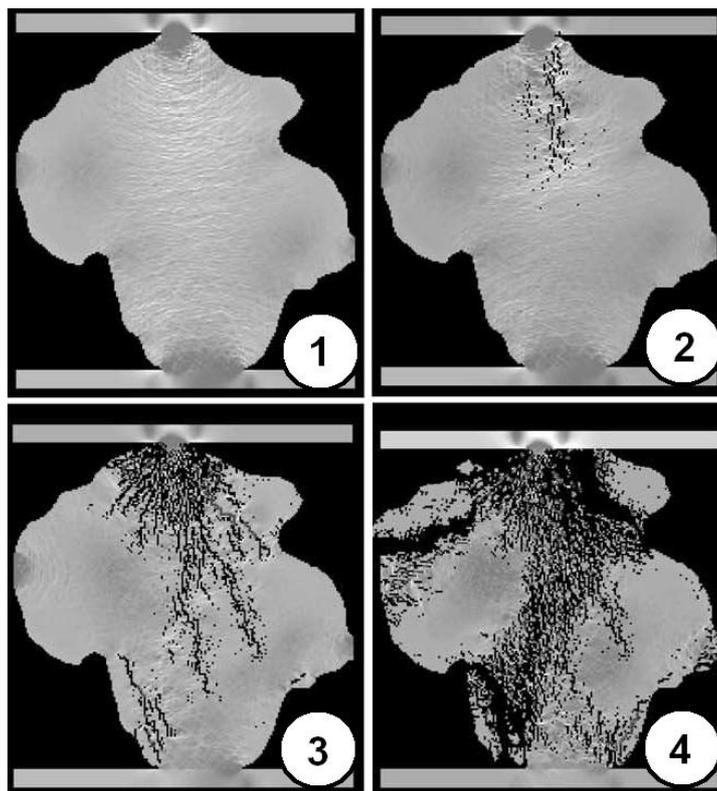


Figura II-14. Simulação das tensões e das trincas geradas em uma partícula sob carregamento diametral sem confinamento da mesma (Tang et al., 2001).

Alguns anos mais tarde, Potapov e Campbell (1999) também simularam a quebra de partículas contidas em leitos bidimensionais não-confinados, quando são impactados por uma bola de grande diâmetro. Na Figura II-15, se pode ver o resultado da simulação. O que acontece é que as partículas do leito são quebradas ou dispersas quando a bola cai sobre o leito.

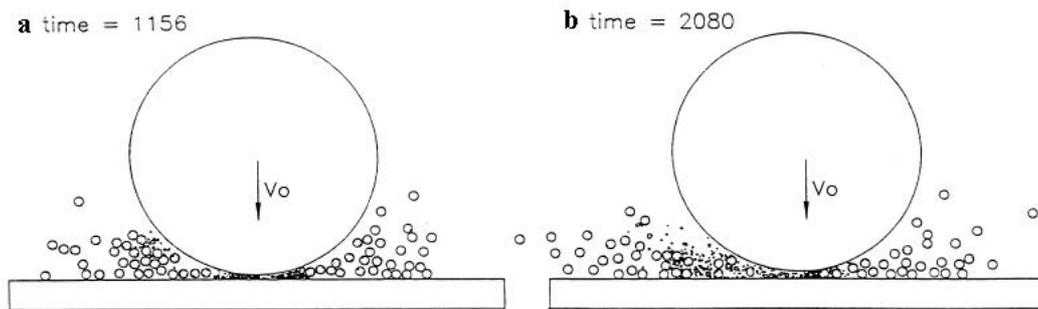


Figura II-15. Esquema da simulação de uma bola em queda livre, sobre um leito de 4 camadas de partículas com diferentes coeficientes de atrito, a) $\mu = 0,1$ e b) $\mu = 0,6$ (Potapov e Campbell, 1999).

As simulações foram realizadas com diferentes condições de espessuras de leito e coeficientes de atrito, mostrando o duplo papel que desempenha o atrito no processo de quebra das partículas: por um lado ele prejudica a quebra, pois é responsável pela maior parte da perda da energia cinética durante o impacto, mas por outro ele favorece a quebra, pois faz que as camadas do leito permaneçam juntas no momento do impacto da bola.

No trabalho de Kou e colaboradores (2001), usando novamente o RFPA^{2D}, foi simulada a quebra de partículas contidas em leitos confinados. Na Figura II-16, é possível observar que a pressão externa aplicada às partículas não é distribuída uniformemente no leito, bem como que a quebra das partículas presentes no leito inicia por aquelas que estão em contato direto com as paredes do equipamento. Nessas simulações os pesquisadores puderam verificar que apenas 36% da energia aplicada era gasta na quebra das partículas.

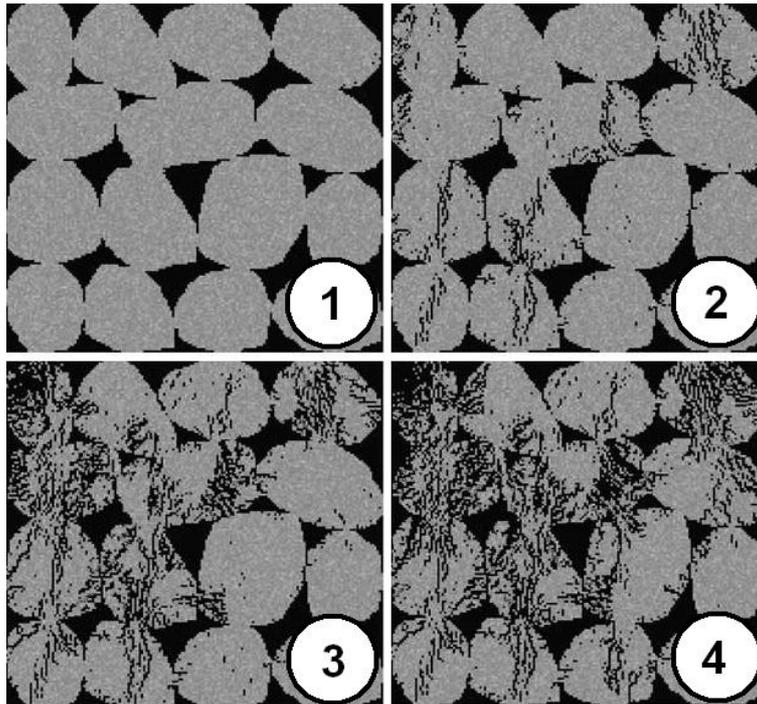


Figura II-16. Distribuição das tensões durante o processo de fratura interparticular (Kou et al., 2001).

II.4.4 Modelagem em microescala

Continuando com a metodologia de Cho que ressalta a importância de considerar os efeitos da ambiente da moagem na forma do espectro de energias de impacto, King e Bougeois (1993) apresentaram um modelo conceitual para os moinhos de bolas. A função distribuição de quebra do modelo é apresentada na Equação II-39:

$$b_p(dp', dp) = \int_0^{\infty} m_b(d_i', d_i; \alpha_C E) P(E) dE \quad \text{Equação II-39}$$

sendo $P(E)$ a função de densidade de probabilidades das energias de impacto no moinho, $m_b(d_i', d_i, \alpha_C E)$ a massa de partículas menores que d_i' que são criadas a partir da quebra das partículas de tamanho d_i quando submetidas a um impacto de energia E . O parâmetro α_C foi estimado a partir de um modelo de fratura de partículas individuais.

Continuando com os estudos em microescala dos processos de quebra de partículas, King pesquisou sobre a quebra de partículas individuais. Estudos realizados na Universidade de Utah (Tavares, 1997) mostraram que uma população de partículas possui uma variabilidade intrínseca atribuída à sua resistência à fratura. Porém, para

analisar as características da quebra dos diferentes tipos de materiais, se desenvolveram equipamentos como a célula de carga de impacto, que tem a capacidade de determinar a energia específica de quebra de partículas individuais.

Baseados no modelo apresentado por Datta, King e Bourgeois propuseram um modelo generalizado que considera o espectro das energias de impacto e a distribuição de energias de fratura. A Equação II-40 representa função quebra ponderada proposta, esta equação é baseada na função quebra obtida pela quebra de partículas individuais em função do nível energético.

$$B(x, x') = \int_0^1 \int_0^{\infty} B(x, x', eE) P(eE, x') p(e) p(E) de dE \quad \text{Equação II-40}$$

sendo $P(E, x')$ a probabilidade de quebra de uma partícula de tamanho x' quando recebe uma quantidade de energia E de um impacto no moinho e $B(x, x', E)$ a função quebra que resulta de um único evento de impacto de energia E . $p(E)$ é a distribuição de densidades para as energias de impacto no moinho e e é a fração da energia naquele impacto que é capturada por uma única partícula. $p(e)$ descreve como e é distribuída sobre a população de partículas (King 2001).

A proposta de King tem algumas limitações associadas ao fato que ainda não se tem muito conhecimento sobre como é a repartição da energia num leito de partículas. Além disso, o modelo é baseado na consideração que as propriedades de quebra das partículas são constantes. Por último, se tem que o modelo não chegou a ser validado e nem sequer aplicado.

II.4.4.1 Mecânica do dano

Um dos avanços necessários para tornar o modelo proposto por King mais realista vem da linha de pesquisa desenvolvida por Tavares (Tavares e King 2002). O objetivo principal do trabalho foi estabelecer a relação entre o acúmulo de dano que

ocorre durante um único impacto e o progressivo enfraquecimento das partículas que ocorre depois de repetidos impactos, o que, no final, dá como resultado a quebra da partícula. O modelo proposto associa o aumento do dano interno da partícula com a degradação da rigidez do material. O modelo foi validado usando os dados experimentais de repetidos testes de impacto de partículas individuais na célula de carga de impacto.

O modelo de mecânica do dano é fundamentado na teoria de contatos de Hertz. Na Equação II-41 se tem a expressão que descreve o fenômeno (Tavares e King, 2002).

$$E_{k,n} = \frac{1}{m_p} \int_0^{a_n} F d\psi \quad \text{Equação II-41}$$

sendo E a energia na forma de tensão que é absorvida pela partícula submetida a carregamento que é calculada via integração do perfil de deslocamento da carga e m_p é a massa da partícula.

Considerando que toda a energia cinética que é aplicada à partícula foi convertida em energia de tensão, se tem a Equação II-42:

$$E_{k,n} = \frac{1}{m_p} \int_0^{a_n} \frac{k\sqrt{d}}{3} \left[1 - \frac{\psi}{\psi_c} \right] \psi^{3/2} d\psi \quad \text{Equação II-42}$$

que depois de resolver e definido o parâmetro quantidade de dano D_n^* como:

$$D_n^* = \left(\frac{\psi_n}{\psi_c} \right)^\gamma \quad \text{Equação II-43}$$

sendo ψ_c a deformação de fratura, ψ_n a máxima deformação atingida durante o n -ésimo evento de carregamento e γ a constante de acumulação de dano. Reconhecendo que a rigidez da partícula antes do evento de carregamento n é k_{n-1} , então a equação se torna:

$$E_{k,n} = \frac{2}{15} \left(\frac{2\gamma + 5 - 5D_n^*}{2\gamma + 5} \right) \frac{k_{n-1} \psi_n^{5/2} d^{1/2}}{m_p} \quad \text{Equação II-44}$$

sendo $E_{k,n}$ a energia específica do impactor no n -ésimo evento de carregamento que é toda convertida em energia de deformação.

A energia específica requerida para estilhaçar completamente a partícula é chamada de energia específica de fratura, que pode ser calculada substituindo $D_n^* = 1$ e $\psi_c = \psi_n$:

$$E_{n-1} = \frac{4\gamma}{15(2\gamma+5)} \frac{k_{n-1}\psi_n^{5/2}d^{1/2}}{m_p} \quad \text{Equação II-45}$$

Considerando que a equação permanece válida durante vários impactos, então substituindo a Equação II-45 na Equação II-44 obtém-se a relação entre a energia específica de fratura em sucessivos impactos como:

$$E_n = E_{n-1}(1 - D_n^*) \quad \text{Equação II-46}$$

Por último, se tem a Equação II-47 que representa a quantidade de dano sofrido no n -ésimo ciclo de carregamento:

$$D_n^* = \left[\frac{2\gamma}{(2\gamma+5-5D_n^*)} \frac{E_{k,n}}{E_{n-1}} \right]^{\frac{2\gamma}{5}} \quad \text{Equação II-47}$$

Este modelo evita trabalhar diretamente com as curvas de tensão-deformação de cada partícula, simplificando a modelagem de forma que o único parâmetro a ser ajustado é o γ .

II.4.4.2 Modelo da função quebra baseado na energia de impacto

Ensaio de impacto de partículas individuais realizados na célula de carga de impacto ou no equipamento rotativo de quebra de partícula (Shi, et. al., 2008) permitem avaliar a quantidade de energia necessária para quebrar um material e determinar a relação entre energia fornecida e a distribuição granulométrica do produto. As distribuições granulométricas dos produtos podem ser expressas em termos do parâmetro t_{10} , definido como a quantidade de partículas menores do que 1/10 do

tamanho inicial das partículas. O parâmetro t_{10} é diretamente influenciado pela energia de impacto aplicada à partícula no ensaio, sendo geralmente dado por (Napier-Munn et al., 1996):

$$t_{10} = A_N (1 - \exp(-bE)) \quad \text{Equação II-48}$$

sendo A_N e b parâmetros de quebra do material, no qual o produto $A_N * b$ indica a suscetibilidade do material à quebra por impacto.

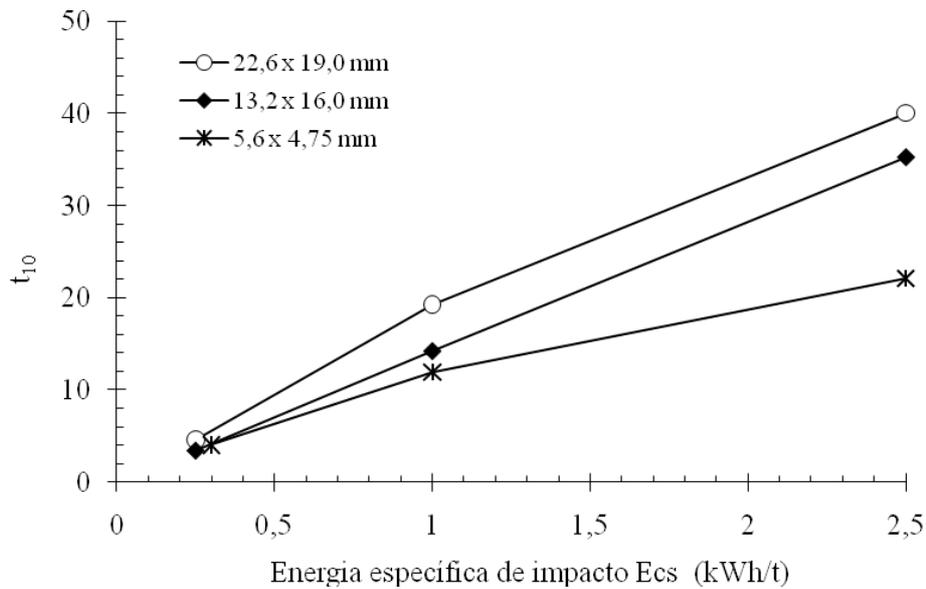


Figura II-17. Efeito do tamanho de partícula na relação entre a energia específica de cominuição e o parâmetro t_{10} para diferentes tamanhos iniciais de partículas de um minério de cobre.

Entretanto, conforme mostra a Figura II-17, o parâmetro t_{10} frequentemente também é influenciado pelo tamanho de partícula. Tavares (2007) propôs uma modificação da Equação II-48, levando em consideração o aumento da resistência das partículas com a sua diminuição de tamanho:

$$t_{10} = t_{10\max} \left(1 - e^{\frac{-\beta E}{E_{50}}} \right) \quad \text{Equação II-49}$$

O valor de $t_{10\max}$ corresponde ao valor limite de t_{10} , fornecendo o valor limite da curva entre energia e t_{10} . Esse limite indica que a aplicação de energias elevadas não

implica em valores maiores desse parâmetro. A constante β reflete a tendência do material a sofrer fraturas múltiplas, correspondendo ao gradiente da curva.

Na Figura II-18 se pode observar o parâmetro E_{50} , o qual corresponde à energia de fratura média, ou seja, a energia na qual o 50% das partículas de um tamanho i são quebradas. A partir dos t_{10} obtidos na fragmentação de diferentes monotamanhos da amostra em questão, é possível ajustar os parâmetros da Equação II-50 para obter a curva E/E_{50} que permite calcular o valor de t_{10} a partir de certa energia aplicada à partícula, independente de seu tamanho (\bar{d}). O parâmetro E_{∞} , dessa mesma equação, representa a energia específica de fratura de partículas de tamanho infinito. Tanto d_0 quanto ϑ são parâmetros específicos do material (Tavares e King, 1998), sendo determinados a partir de ensaios de quebra na célula de carga de impacto.

$$E_{50} = E_{\infty} \left[1 + \left(\frac{d_0}{d} \right)^{\vartheta} \right] \quad \text{Equação II-50}$$

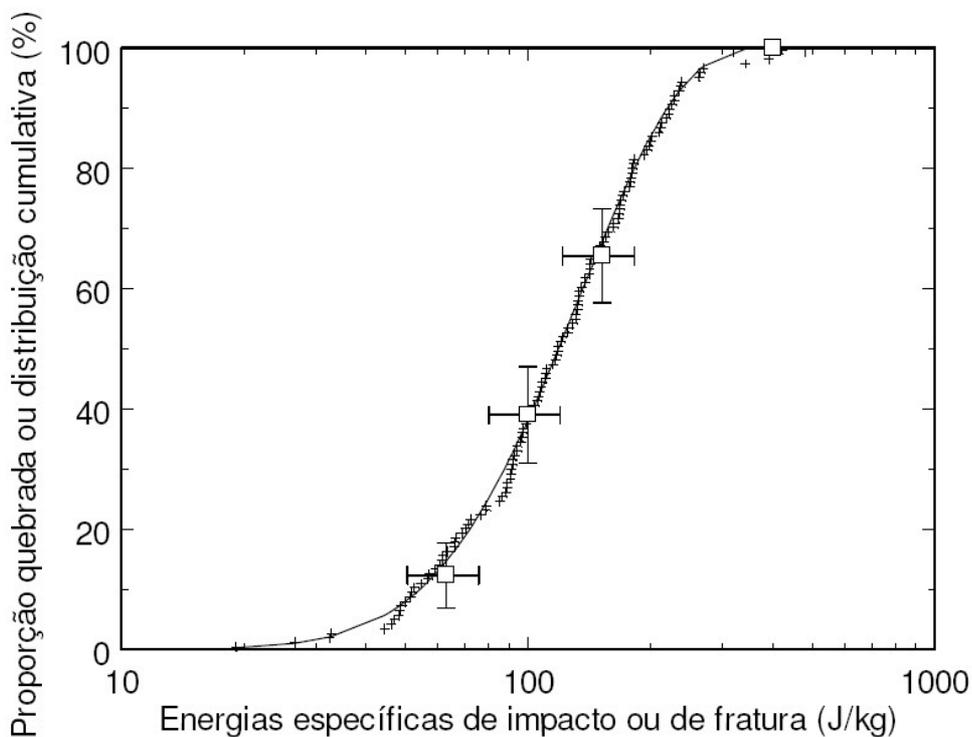


Figura II-18. Probabilidades de quebra e distribuição de energias específicas de fratura de partículas de 45,0 x 37,5 mm de bauxita (Tavares, 2009).

II.4.4.3 Modelagem generalizada da cominuição

Baseado nos modelos vistos anteriormente, Tavares e Carvalho (Tavares e Carvalho, 2009), propõem um modelo matemático que considera a taxa de quebra como uma função não linear, a distribuição de energias de impacto dos corpos moedores no interior do moinho, a repartição da energia no leito de partículas impactadas e o enfraquecimento das partículas quando sofre impactos repetidos.

Os dados de energia de fratura da Figura II-18 podem ser ajustados a uma função probabilística mostrada na Equação II-51 (Tavares e King, 2002):

$$F_i(E,0) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln E^* - \ln E_{50i}}{\sqrt{2\sigma_i^2}} \right) \right] \quad \text{Equação II-51}$$

sendo o parâmetro E^* , dado pela

Equação II-52:

$$E^* = \frac{E_{\max,i} E}{E_{\max,i} - E} \quad \text{Equação II-52}$$

sendo E_{50i} a energia de fratura mediana, σ_i^2 a variância da distribuição e $E_{\max,i}$ representa o truncamento superior da função de distribuição. A energia de fratura média é calculada modificando a Equação II-50:

$$E_{50i} = E_\infty \left[1 + \left(\frac{d_0}{d_i} \right)^\phi \right] \overline{m}_{p,i} \quad \text{Equação II-53}$$

sendo d_i o tamanho representativo das partículas da classe i e E_∞ , d_0 e ϕ parâmetros do modelo que são determinados experimentalmente. A massa média das partículas da classe i é estimada com a Equação II-54.

$$\overline{m}_{p,i} = \rho \beta_F d_i^3 \quad \text{Equação II-54}$$

sendo ρ o peso específico do material e β_F o fator de forma.

Uma descrição matemática apropriada do processo de moagem num moinho de bolas é possível considerando o balanço de massa das partículas envolvidas no evento de carregamento dos corpos moedores. Na Figura II-19 se pode observar o esquema que descreve o que acontece num evento de carregamento.

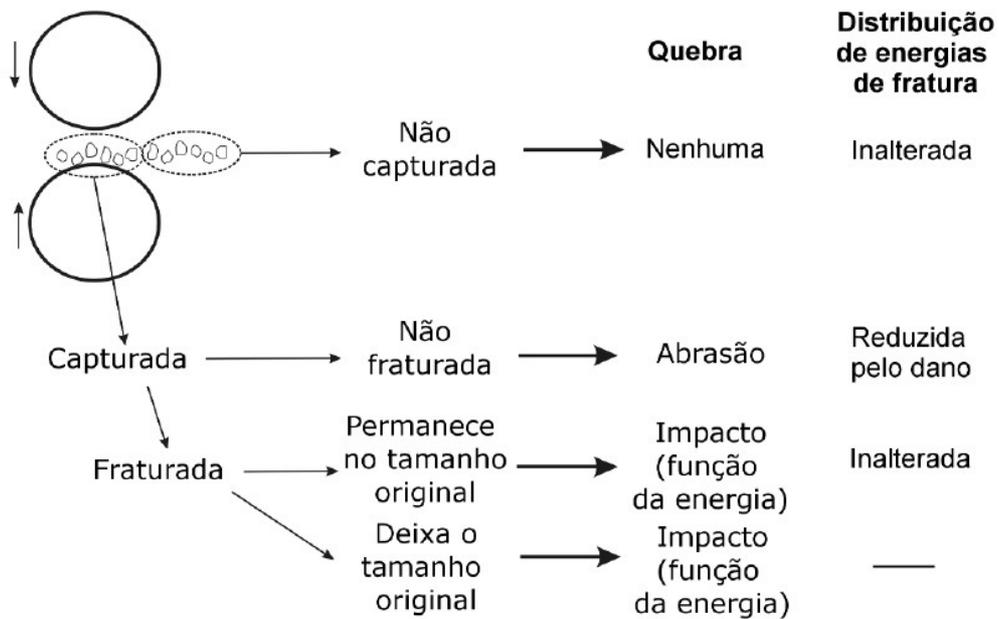


Figura II-19. Seqüência de mecanismos para um evento de quebra (Tavares e Carvalho, 2009).

O balanço de massa da primeira classe de tamanhos do material (classe número

1) que entra no moinho esta representado pela Equação II-55:

$$\frac{dw_1(t)}{dt} = -w_1(t) \frac{\omega(t)}{W} \left[\int_0^{\infty} m_1(E, t) p(E, t) \int_0^1 [1 - b_{11}(eE, E_{50bi})] F_1(eE, t) p(e) de dE + \kappa_1 \int_0^{\infty} m_1(E, t) p(E, t) \int_0^1 [1 - F_1(eE, t)] p(e) de dE \right] \quad \text{Equação II-55}$$

sendo W o *hold-up*, $\omega(t)$ a freqüência de colisões por segundo no interior do moinho, $w_1(t)$ a fração de partículas na classe 1 depois de um tempo de moagem t . $p(E, t)$ é a distribuição de densidade das colisões dentro do moinho, E é a energia de colisão em Joules e e é a fração da energia de colisão capturada pelas partículas individuais durante

o evento de tensão. $F_1(eE, t)$ é a probabilidade de quebra das partículas da classe 1 quando recebem um impacto de energia eE proveniente do evento de tensão no interior do moinho, que é equivalente à distribuição de energias de fratura (Tavares e King, 1998). A massa da partícula da classe i que é impactada é dada por $m_1(E, t)$, a qual depende da energia do impacto e do tempo. $p(e)$ é a função de repartição de energia do impacto no leito de partículas (King, 2001). As funções $p(E, t)$ e $p(e)$ tem que cumprir as condições a seguir:

$$\int_0^{\infty} p(E, t) dE = 1 \quad \text{Equação II-56}$$

$$\int_0^{\infty} p(e) de = 1 \quad \text{Equação II-57}$$

Definindo a função F_1^* :

$$F_1^*(E, t) = \int_0^1 F_1(eE, t) p(e) de \quad \text{Equação II-58}$$

se tem uma nova energia de fratura média:

$$E_{50b} = F^{*-1} \left[\frac{1}{2} F^*(E, t) \right] \quad \text{Equação II-59}$$

È importante ressaltar que o modelo proposto considera que uma partícula foi quebrada quando esta perde pelo menos 10% do peso original e não quando a partícula deixa a classe de tamanhos compreendida pela serie de peneiras.

Combinando a Equação II-51 e Equação II-47, se tem a expressão para a distribuição de energias de fratura depois do n -ésimo evento de carregamento (Tavares e Carvalho, 2009):

$$F_{n+1}(E) = \left(\frac{F_n \left[E / (1 - D_n^*) \right] - F_n(E_k)}{1 - F_n(E_k)} \right) \quad \text{Equação II-60}$$

sendo $F_n(E_k)$ a proporção de partículas quebradas no n -ésimo evento de carregamento de energia E_k , E é a energia de fratura da partícula que permanece sem quebrar depois do n -ésimo evento de carregamento e D_n^* é a quantidade de dano acumulada pela partícula.

III. METODOLOGIA

A metodologia empregada neste trabalho esta dividida em três partes. A primeira trata da caracterização dos diferentes materiais utilizados, para obter dados de quebra de partículas individuais e de quebra de leitos. Os dados obtidos nos ensaios experimentais foram usados na segunda parte do trabalho para calibrar as simulações computacionais e para validar o modelo proposto de quebra de leitos de partículas. Adicionalmente foram usados dados da literatura para validar o modelo matemático proposto. Na terceira parte do trabalho o modelo proposto da quebra em leitos é utilizado na simulação da moagem em batelada do moinho de bolas.

Todos os ensaios experimentais de caracterização dos materiais foram realizados no Laboratório de Tecnologia Mineral LTM/COPPE/UFRJ. Na Tabela III-1 são mencionados os diferentes materiais usados neste estudo e a proveniência de cada um deles.

Tabela III-1. Materiais usados no presente trabalho

Material	Proveniência
Quartzo	Karlsruhe, Alemanha (tese de doutorado de Bourgeois, 1993)
Minério de Cobre	Mina do Sossego, Vale (PA)
Calcário	Mina de Cantagalo, Votorantim Cimentos (RJ)
Minério de Ferro	Usina de Timbopeba, Vale (MG)

III.1 Caracterização de partículas individuais

A seguir é apresentada a metodologia padrão utilizada na Modelagem Generalizada da Cominuição para caracterizar a quebra de partículas individuais (Carvalho, 2009).

III.1.1 Ensaio de caracterização da energia de fratura

Para a determinação da distribuição de energias de fratura foi utilizada a Célula de Carga de Impacto (CCI) que se encontra no LTM, a qual é uma replica da CCI desenvolvida no *Utah Comminution Center* (Figura III-1). A CCI é um equipamento que permite a medida da curva força versus deformação resultante do impacto de partículas individuais ou de leitos de partículas sob condições de carregamento rápido (Tavares e King, 1998).

Além da energia mínima da fratura, também é possível determinar com a CCI a resistência da partícula, a rigidez e a energia absorvida pela partícula durante todo o evento de quebra (Tavares e King, 1998).

Na Figura III-1 é apresentado o digrama esquemático da CCI. A célula consiste de uma barra de aço carbono verticalmente orientada, instrumentada com *strain gauges* (sensores de deformação) semicondutores, posicionados próximos à extremidade superior da barra. Os sensores de deformação devem apresentar alta resolução, uma vez que os esforços necessários para a ruptura da partícula em teste são, normalmente, de baixa magnitude. A partícula a ser fragmentada é colocada sobre a barra vertical, de modo que sofra impacto de uma esfera de aço ou uma bigorna, lançada em queda livre de uma altura conhecida. A fonte de raios laser é o mecanismo que serve para iniciar a aquisição de dados, o qual é ativado quando a esfera de aço cruza o feixe de laser. Quando a esfera impacta na barra de aço, faz com que a onda de choque se propague e gere um perfil de força contra tempo, que posteriormente é analisado e fornece a energia específica de fratura E .

O sistema de aquisição de dados é constituído por uma ponte de Wheatstone, uma placa de aquisição de dados e um computador onde se recopiam os dados e se calcula a energia de fratura da partícula.

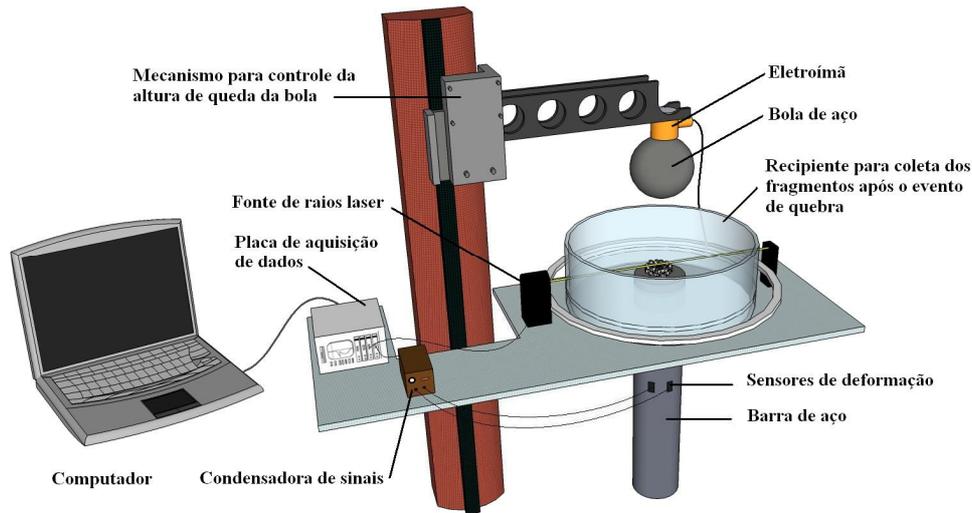


Figura III-1. Diagrama esquemático da célula de carga de impacto (Tavares e King, 1998).

A Equação III-1 representa a energia necessária para a quebra da partícula, obtida a partir dos ensaios de fragmentação na CCI (Tavares e King, 1998).

$$E = \frac{1}{m_p} \left[v_0 \int_0^t F(\tau) d\tau + g \int_0^t F(\tau) d\tau - \frac{1}{2m_e} \left(\int_0^t F(\tau) d\tau \right)^2 - \frac{1}{\rho_b A_b C_b} \int_0^t F^2(\tau) d\tau \right] \quad \text{Equação III-1}$$

sendo E a energia necessária para quebrar o material em J/kg, v_0 a velocidade da esfera no instante do impacto em m/s, F a força exercida pela partícula na barra da CCI, g a aceleração da gravidade em m/s^2 , t o tempo necessário para fraturar a partícula, m_e a massa da esfera em kg, m_p a massa da partícula em kg, ρ_b a densidade da barra em kg/m^3 , A_b a área da seção transversal da barra da CCI em m^2 e C_b a velocidade de propagação de ondas na CCI em m/s.

Os dados de energia de fratura podem ser ajustados a uma distribuição probabilística denominada log-normal truncada, dada por (Tavares e King, 2002):

$$F_i(E,0) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln E^* - \ln E_{50i}}{\sqrt{2\sigma_i^2}} \right) \right] \quad \text{Equação III-2}$$

sendo o parâmetro E^* dado pela Equação III-3:

$$E^* = \frac{E_{\max,i} E}{E_{\max,i} - E} \quad \text{Equação III-3}$$

sendo E_{50i} a energia de fratura mediana, σ_i^2 a variância da distribuição e $E_{\max,i}$ representa o truncamento superior da função de distribuição. A energia de fratura média para cada classe de tamanho de partículas i é dada por:

$$E_{50i} = E_{\infty} \left[1 + \left(\frac{d_0}{d_i} \right)^{\phi} \right]^{-\frac{1}{m_{p,i}}} \quad \text{Equação III-4}$$

sendo d_i o tamanho representativo das partículas da classe i , $m_{p,i}$ a massa média das partículas da classe i e E_{∞} , d_0 e ϕ parâmetros do modelo que são determinados a partir de ajuste a dados experimentais.

III.1.2 Ensaio de fragmentação de partículas

O ensaio de fragmentação de partículas, de queda de peso ou *Drop Weight Test* (DWT) tem como objetivo a determinação da função quebra de materiais. Neste ensaio partículas são impactadas individualmente por um peso a partir de uma altura conhecida. Em seguida, todos os fragmentos são recolhidos para realizar a análise granulométrica dos mesmos.

No ensaio de fragmentação é possível submeter partículas a diferentes energias de impacto variando-se a altura de queda do peso, de maneira a tornar possível correlacionar o nível de quebra com a energia aplicada. É totalmente plausível afirmar que quanto maior a energia aplicada maior será o nível de quebra, podendo ocorrer um maior número de eventos seqüenciais de quebra.

A fim de correlacionar a função quebra do material com a energia de impacto aplicada, cada análise granulométrica do produto da quebra pode ser parametrizada em função dos chamados parâmetros t_n (Narayanan e Whiten, 1988), sendo o mais importante o

parâmetro t_{10} que expressa a porcentagem de material gerado na quebra que é menor que um décimo do tamanho original de partícula. A relação entre a energia de impacto (E) e o parâmetro t_{10} pode ser expressa pela Equação III-5 (Tavares, 2007):

$$t_{10} = t_{10 \max} \left(1 - \exp \left(-\beta \frac{E}{E_{50}} \right) \right) \quad \text{Equação III-5}$$

O valor de $t_{10 \max}$ corresponde ao valor limite de t_{10} , fornecendo o valor limite da curva entre energia e t_{10} . Esse limite indica que a aplicação de energias elevadas não implica em valores maiores desse parâmetro. A constante β reflete a tendência do material a sofrer fraturas múltiplas, correspondendo ao gradiente da curva.

Para descrever a função quebra completa a partir do parâmetro t_{10} se utiliza a função beta incompleta (Carvalho, 2009), pois esta é capaz de descrever cada curva t_{10} *versus* t_n de maneira adequada, necessitando apenas de dois parâmetros de ajuste (α_n e β_n) para cada n . A forma funcional da função beta incompleta em função de t_{10} é:

$$t_n(t_{10}, \alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{\int_0^1 y^{\alpha_n-1} (1-y)^{\beta_n-1} dy} \int_0^{t_{10}} y^{\alpha_n-1} (1-y)^{\beta_n-1} dy \quad \text{Equação III-6}$$

III.2 Caracterização de partículas em leitos

A seguir são descritos os diferentes ensaios realizados com leitos de partículas, com o objetivo de desenvolver e validar o modelo de quebra em leitos desenvolvido.

III.2.1 Captura de partículas

O objetivo do ensaio de captura de partículas é determinar o número de partículas que são capturadas durante um impacto contidas em um leito monocamada com um diâmetro definido. O leito é formado por partículas em uma faixa de tamanho de partícula i (leito monodisperso) e as partículas formam um arranjo hexagonal densamente empacotado.

Para determinar experimentalmente o número de partículas dos leitos contidos em uma monocamada, se utilizaram círculos de papel adesivo de diferentes diâmetros, como se pode observar na Figura III-2.

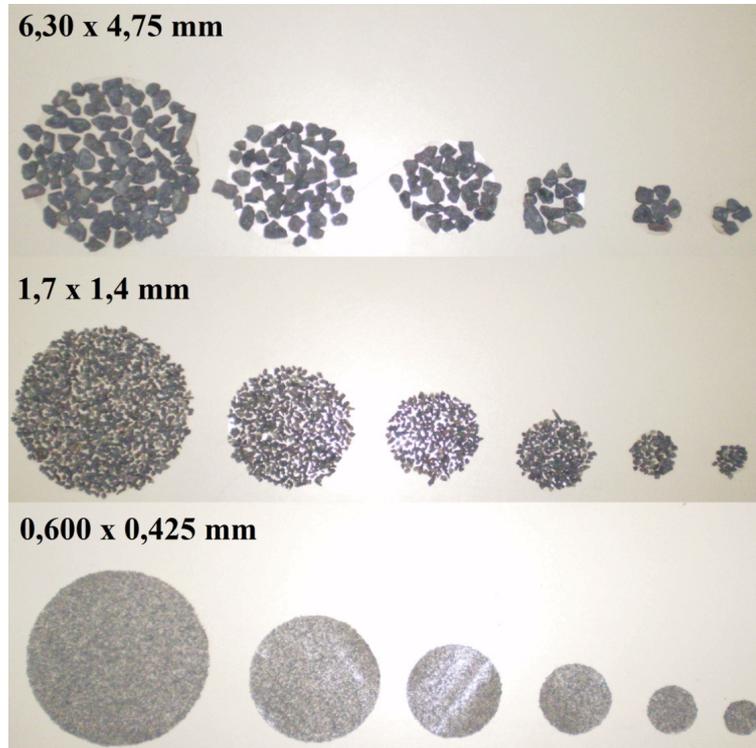


Figura III-2. Leitos de diferentes diâmetros monodispersos de uma monocamada, conformados por partículas de diferentes tamanhos de minério de cobre do Sossego.

O peso da monocamada é a diferença de peso entre o papel e o papel com as partículas aderidas. Nos ensaios de captura de partículas se produziram leitos monodispersos com quatro tamanhos de partícula diferentes: 6,30 x 4,75 mm, 1,7 x 1,4 mm, 0,600 x 0,425 mm e 0,212 x 0,150 mm. O diâmetro dos leitos foi de 57 mm, 44 mm, 33 mm e 19 mm.

Presumindo que as partículas se encontram formando um arranjo hexagonal no leito, é possível calcular o número de partículas capturadas pela expressão:

$$Np_{cap i} = f_c \left(0,25 + 0,75 \left(\frac{2r_c}{d_i} \right)^2 \right) \quad \text{Equação III-7}$$

sendo d_i o tamanho médio de partícula, r_c o raio do papel, que corresponderá ao raio de captura e f_c é o fator usado para quando se tem uma fração de partículas menor em comparação ao leito densamente empacotado. Na Figura III-3 se pode observar os dados experimentais e a Equação III-7 que representa a razão entre o tamanho de partícula d_i e o diâmetro de captura $d_c = 2 * r_c$ versus o numero de partículas $N_{Pcap i}$.

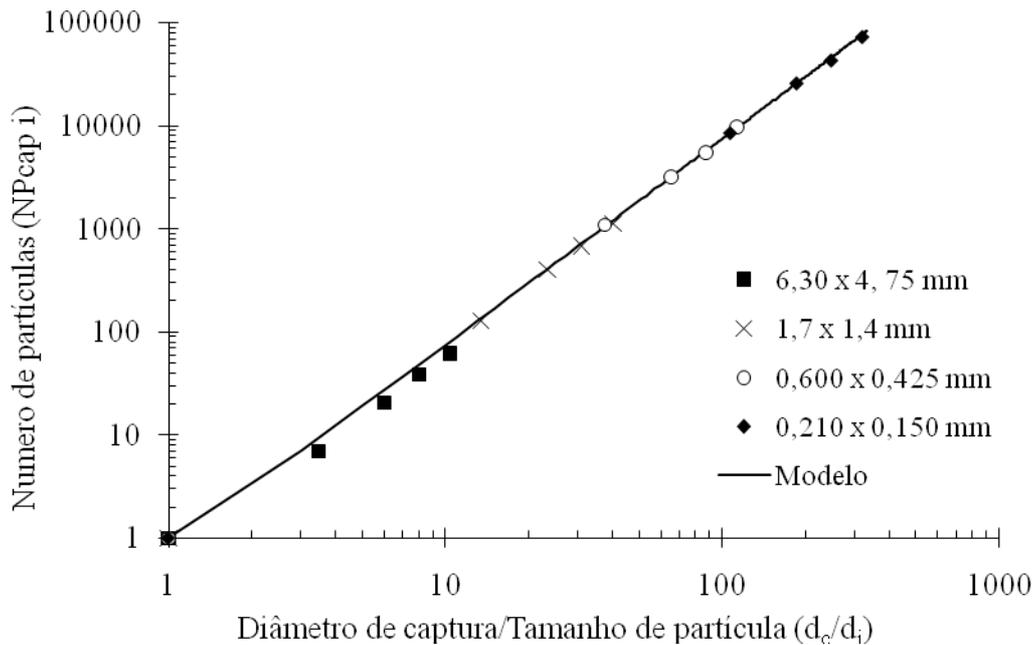


Figura III-3. Numero de partículas do leito em função da razão entre o diâmetro do leito e o tamanho médio de partícula, para partículas de calcário Cantagalo.

III.2.2 Impressão de leitos

O ensaio de impressão de leitos consiste em determinar a área de captura de um corpo moedor quando impacta um leito correspondente a uma monocamada com partículas contidas em uma faixa estreita de tamanhos.

Neste ensaio de utilizaram esferas de aço de 40 mm, 60 mm e 88 mm de diâmetro como corpos moedores, com quatro energias de impacto: 1,52 J, 3,05 J, 6,10 J e 9,15 J. Os tamanhos de partícula dos leitos monodispersos impactados foram: 6,30 x 4,75 mm, 1,7 x 1,4 mm, 0,425 x 0,300 mm. Adicionalmente se realizaram impressões

de impactos sem partícula para observar o efeito da deformação dos corpos moedores sobre a barra.

A fim de se obter a impressão do impacto no leito, foi colocada uma base de papel carbono e papel branco embaixo dos leitos, de forma a se obter impressões para as diferentes condições de impacto como se mostra na Figura III-4.

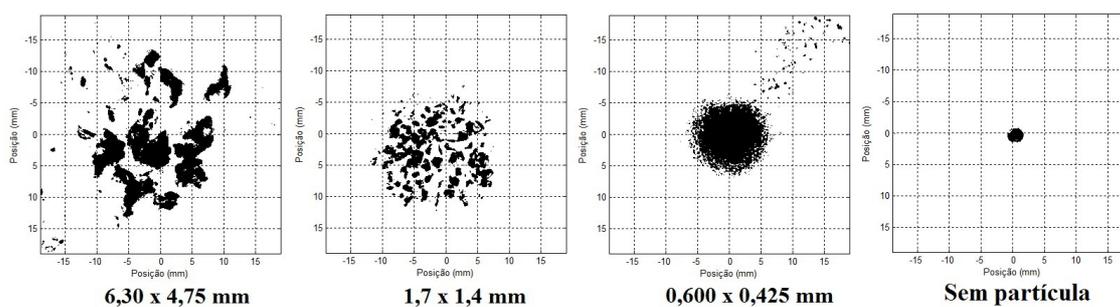


Figura III-4. Área de captura de uma esfera de 88 mm e energia de impacto de 9,15 J, para diferentes tamanhos de partícula.

As impressões em papel carbono são analisadas digitalmente, usando uma rotina no programa Matlab[®]. A partir da imagem binária, é calculada a percentagem de área preta ou capturada versus o raio da área da impressão, permitindo estimar o raio de captura para cada condição de impacto.

III.2.3 Quebra de leitos por impacto com barra

Os ensaios de quebra de leitos com um impacto plano (barra) foram realizados principalmente para estimar indiretamente a energia de fratura E_{50} de partículas com tamanhos inferiores a 6,30 mm, uma vez que a CCI apresenta dificuldades principalmente na resolução do sinal e no manuseio das amostras.

A diferença entre o ensaio de quebra de leitos com bola e aquele no qual o impactor é plano está associada ao fato que pode-se considerar que, no último caso, é possível presumir que todas as partículas contidas no leito recebem a mesma fração de energia de impacto. Na Figura III-6 se pode observar a CCI de 63 mm com os acessórios que foram utilizados para os ensaios de quebra de leitos com barra.



Figura III-5. Célula de carga de impacto de 63 mm com acessórios para o ensaio de quebra de leitos por impacto com barra.

Os ensaios se realizaram utilizando energias de impacto de: 0,25, 1,00 e 2,50 kWh/t, com leitos contidos em uma monocamada de 33 mm de diâmetro. Os tamanhos de partícula utilizados foram: 6,30 x 4,75 mm, 1,70 x 1,18 mm, 0,600 x 0,425 e 0,212 x 0,150 mm.

Com os dados da função quebra dos diferentes leitos, e a rotina de otimização criada no programa Matlab[®], se retrocalcularam os valores de E_{50} para cada tamanho representativo das partículas d_i .

III.2.4 Quebra de leitos por impacto com bola

O objetivo principal deste ensaio foi avaliar a função quebra de leitos monodispersos, quando recebem um impacto com um corpo moedor esférico. Na Figura III-6 se pode observar a CCI de 63 mm com os acessórios que foram utilizados para os ensaios.



Figura III-6. Célula de carga de impacto de 63 mm com acessórios para o ensaio de quebra de leitos por impacto com bola.

Para avaliar a função quebra se recolheram e peneiraram os fragmentos das partículas do leito impactado para obter a análise granulométrica do material (Figura III-7). Para a análise granulométrica se utilizo uma serie de peneiras da marca Granutest[®] e se peneirou o material a úmido com ajuda de um peneirador vibratório da marca Gilson[®].

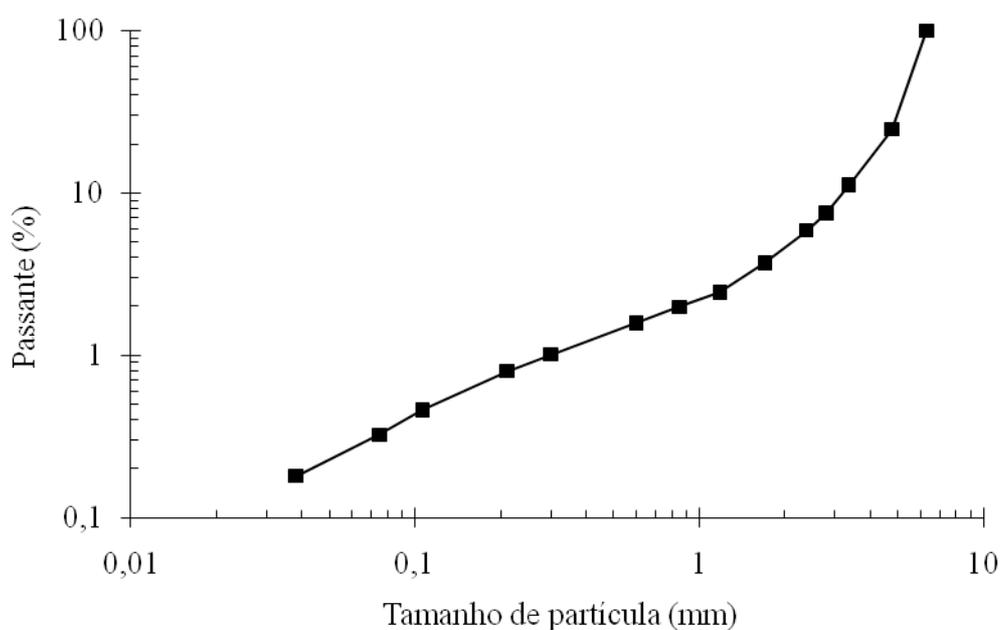


Figura III-7. Análise granulométrica da quebra de um leito de dois anéis de partículas de minério de cobre de 6,30 x 4,75mm, com uma bola de 88 mm e energia de impacto de 3,05 J.

Os primeiros testes se realizaram seguindo a metodologia usada por Bourgeois (1993), que consiste em impactar com uma energia de 3,05 J, leitos monodispersos de 6,30 x 4,75 mm, que vão desde uma partícula individual, até um leito contendo cinco camadas de partículas dispostas em quatro anéis concêntricos. A disposição das partículas segundo os anéis concêntricos é apresentada esquematicamente na Figura III-8.

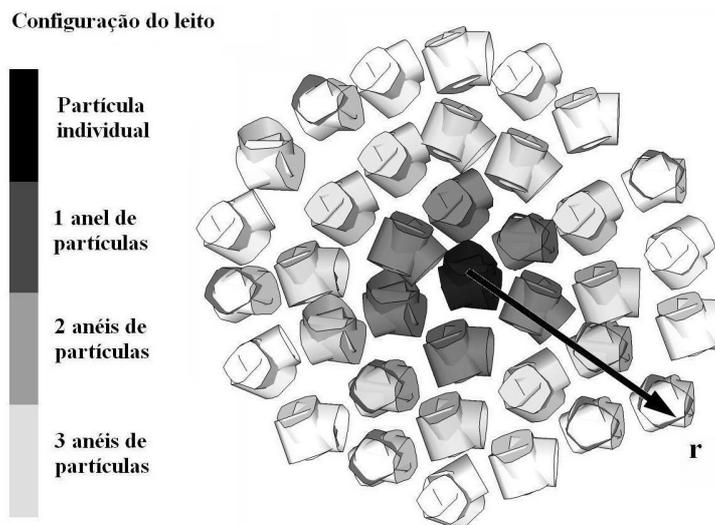


Figura III-8. Esquema do arranjo hexagonal de partículas, com três anéis de partículas.

Na segunda parte dos ensaios foi avaliada a distribuição granulométrica resultante da quebra de leitos de monocamada de partículas contidas em três faixas estreitas de tamanhos. Nestes ensaios a energia de impacto aplicada foi controlada pelo ajuste da altura de queda da bola.

Adicionalmente foi avaliado o efeito do diâmetro do corpo moedor e, finalmente, se realizaram ensaios com leitos monocamada com uma densidade de empacotamento mais baixa que aquela correspondente aos leitos densamente empacotados. A Tabela III-2 resume as diferentes condições usadas nos ensaios de quebra de leitos com bola.

Tabela III-2. Condições usadas nos experimentos de quebra de leitos com bola

Variáveis	Níveis das variáveis
Tamanho de partícula (mm)	6,30 x 4,75, 1,70 x 1,40 e 0,425 x 0,300
Energia de impacto (J)	1,52; 3,05; 6,10 e 9,15
Diâmetro da bola (mm)	88, 60 e 40
Fração de partículas em comparação ao leito densamente empacotado	Um anel empacotado e dois anéis não empacotados.

III.3 Simulação com EDEM

O EDEM é um software baseado no Método dos Elementos Discretos (*Discrete Element Method*) desenvolvido pela DEM Solutions (Edimburgo, Escócia) projetado para simular e analisar o movimento de partículas dentro de processos industriais.

Com o EDEM é possível criar um modelo do sistema de sólidos granulares a partir da calibração de parâmetros no programa (Figura III-9.), sendo as partículas criadas consideradas como elementos esféricos indeformáveis. Os modelos também podem incluir geometrias com propriedades mecânicas e físicas para formar partículas de seu modelo. A simulação com EDEM fornece ferramentas de análise de dados, visualizações em três dimensões do fluxo de partículas, criação de vídeo e visualização de gráficos com qualquer combinação das variáveis incluídas no modelo.

O principal benefício da simulação com EDEM aplicada ao impacto em leitos de partículas é tornar possível obter informações sobre o volume de captura de partículas e a repartição da energia de impacto no leito, uma vez que estas informações são difíceis de medir experimentalmente de forma direta.

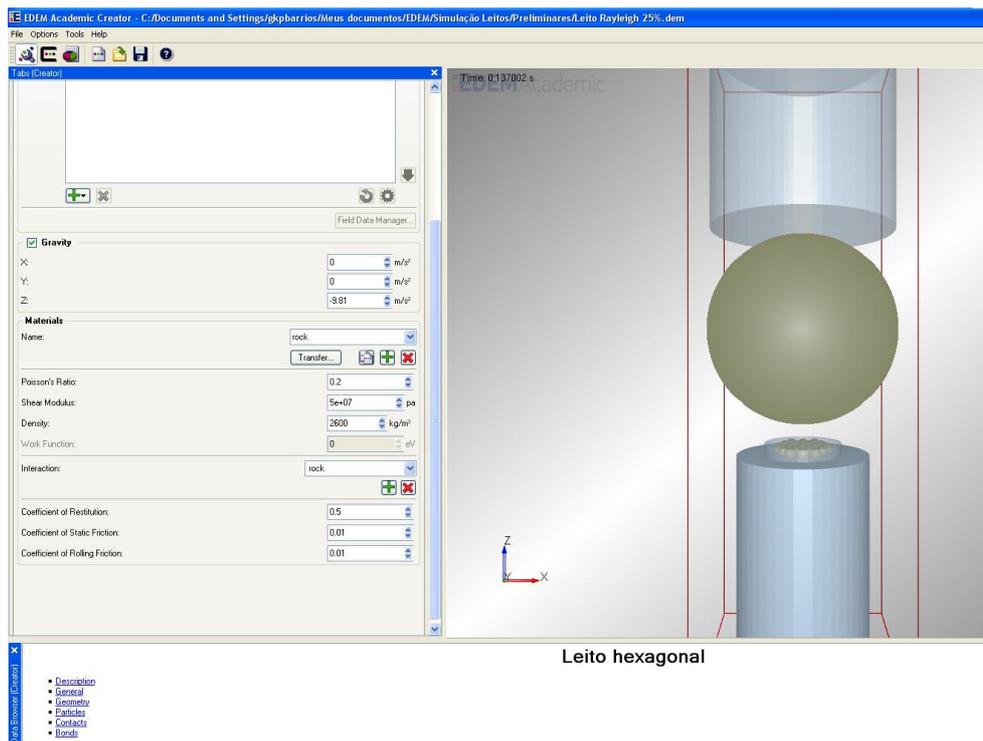


Figura III-9. Interface do software EDEM, com os parâmetros do modelo de contato.

O modelo simulado no EDEM consiste em impactar um leito de partículas com um corpo moedor esférico em queda livre. Para calibrar o modelo de impacto em leitos se criaram partículas de minério com as propriedades predefinidas na biblioteca do programa EDEM para o material “Rock”, ou rocha, enquanto para o impactor esférico se utilizou o material “Steel”, aço.

A fim de calibrar visualmente a simulação de forma que ela fosse o mais fiel possível com a realidade, se variaram os parâmetros dos contatos entre os materiais. Embora seja possível a determinação desses parâmetros experimentais diretamente, o mais comum na simulação usando o DEM ainda é o ajuste dos parâmetros de modo a aproximar a animação visualizada com a percepção da realidade do fenômeno físico (Cleary et al., 2008).

O modelo padrão usado no EDEM é baseado no modelo de Hertz- Mindlin. O primeiro dos parâmetros de contato do modelo é o coeficiente de Restituição C_r , que é a

relação entre a velocidade de separação e a velocidade de aproximação de uma ou mais partículas em uma colisão.

Para uma partícula individual em movimento, tem-se que

$$C_r = \frac{v'}{v_0} \quad \text{Equação III-8}$$

sendo v_0 a velocidade inicial da partícula e v' a velocidade depois da colisão.

Para duas partículas colidindo, tem-se que o coeficiente de restituição é dado por:

$$C_r = \frac{(v_2' - v_1')}{(v_1 - v_2)} \quad \text{Equação III-9}$$

sendo v_1 e v_2 as velocidades iniciais e v_1' e v_2' as velocidades depois da colisão.

Um outro parâmetro de contato que é calibrado no modelo é o Coeficiente de Atrito μ_s , o qual é um valor escalar utilizado para determinar a magnitude da força necessária de se aplicar sobre um objeto em repouso de um dado material, para colocá-lo em movimento. A força F pode ser definida pela expressão:

$$F = \mu_s N \quad \text{Equação III-10}$$

sendo N o peso do objeto em Newtons.

Por ultimo, se variou o Coeficiente de Rolamento μ_R , o qual é um valor escalar utilizado para determinar o torque necessário para ser aplicado a um objeto de um determinado material em repouso sobre uma superfície plana para colocá-lo em movimento. O Coeficiente de Rolamento pode ser definido pela expressão:

$$\mu_R = \frac{t_R}{WR} \quad \text{Equação III-11}$$

sendo t_R o torque necessário para que o objeto role, W o peso do objeto e R o raio de curvatura no ponto de contato. Na Tabela III-3 se podem observar os parâmetros utilizados nas simulações para cada tipo de contato.

Tabela III-3. Parâmetros de contato utilizados nas simulações de impacto em leitos utilizando o software EDEM.

Parâmetro	Rock - Rock	Steel - Steel	Steel - Rock
Coefficiente de Restituição	0,3	0,8	0,0005
Coefficiente de Atrito	0,5	0,5	0,7
Coefficiente de Rolamento	0,1	0,1	0,3

Uma vez calibradas as simulações, foi possível compilar os resultados de maneira a criar figuras que correlacionam as variáveis de interesse. A Figura III-10, a) apresenta o numero de partículas que recebeu certa quantidade da energia de impacto e a Figura III-10, b) apresenta a quantidade de energia de impacto que as partículas recebem em um determinado raio do leito.

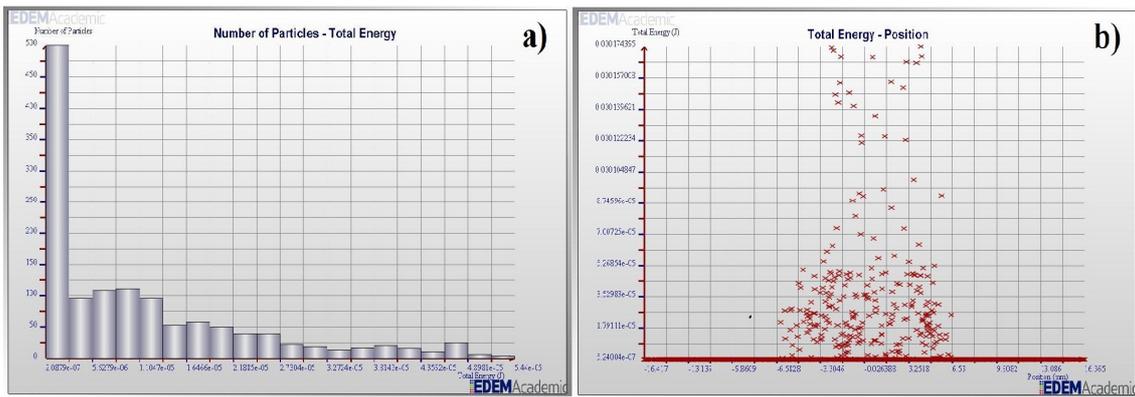


Figura III-10. Simulação em EDEM para um leito monocamada com partículas de 0,5 mm de material “Rock” impactadas por uma bola de material “Steel” de 88 mm com energia de impacto de 3,05 J. a) Numero de partículas versus energia de impacto absorvida b) Posição radial das partículas versus energia de impacto absorvida.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

IV.1 Caracterização de partículas individuais

IV.1.1 Medidas de distribuições de energias de fratura

Os ensaios de fratura de partículas individuais foram realizados com partículas contidas nas faixas de tamanho disponíveis para cada material, sendo 2,3 mm o tamanho mínimo de partículas testadas e 53 mm o tamanho máximo.

Na Figura IV-1 pode-se observar um resultado típico de ensaios de fratura de partículas individuais, no qual a curva de força versus tempo mostra um histórico do carregamento da partícula. A curva é usada para avaliar o comportamento da partícula durante todo o evento de impacto, considerando-se que a ruptura da partícula acontece no ponto onde a força é a mais alta. Após a ruptura, a força exercida sobre a partícula cai, até que a bola em queda novamente carregue os fragmentos, resultando em picos adicionais no gráfico.

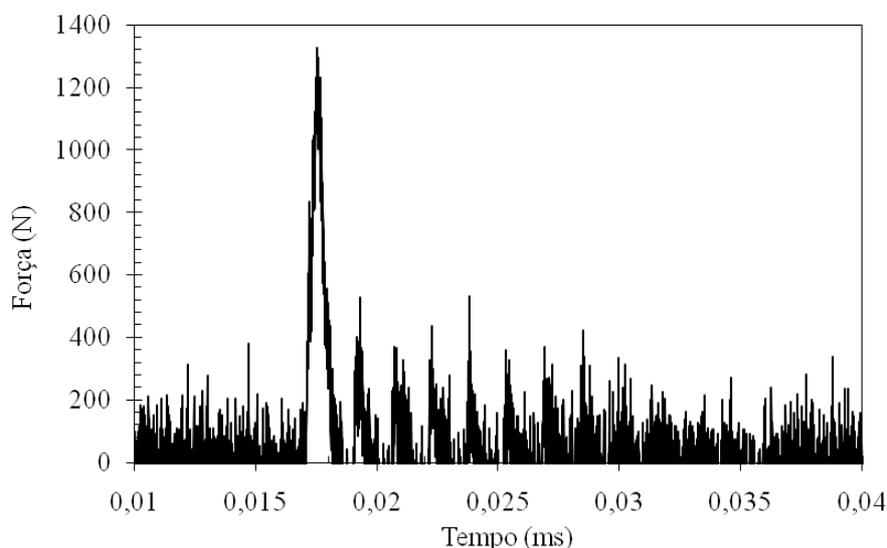


Figura IV-1. Curva de força versus tempo de um ensaio de fratura por impacto na CCI de 19 mm para uma partícula de 11,2 x 9,5 mm de Minério de ferro Timbopeba.

O ensaio de fratura se repete como mínimo 50 vezes para cada tamanho de partícula, de maneira que se obtém uma distribuição de energias específicas de fratura,

como aquela apresentada na Figura IV-2. A distribuição de energias de fratura é ajustada com a Equação III-2, sendo o parâmetro σ_1^2 o desvio padrão dos ensaios de energia de fratura que, normalmente, é constante para cada material, e o parâmetro E_{50} que varia para cada tamanho de partícula.

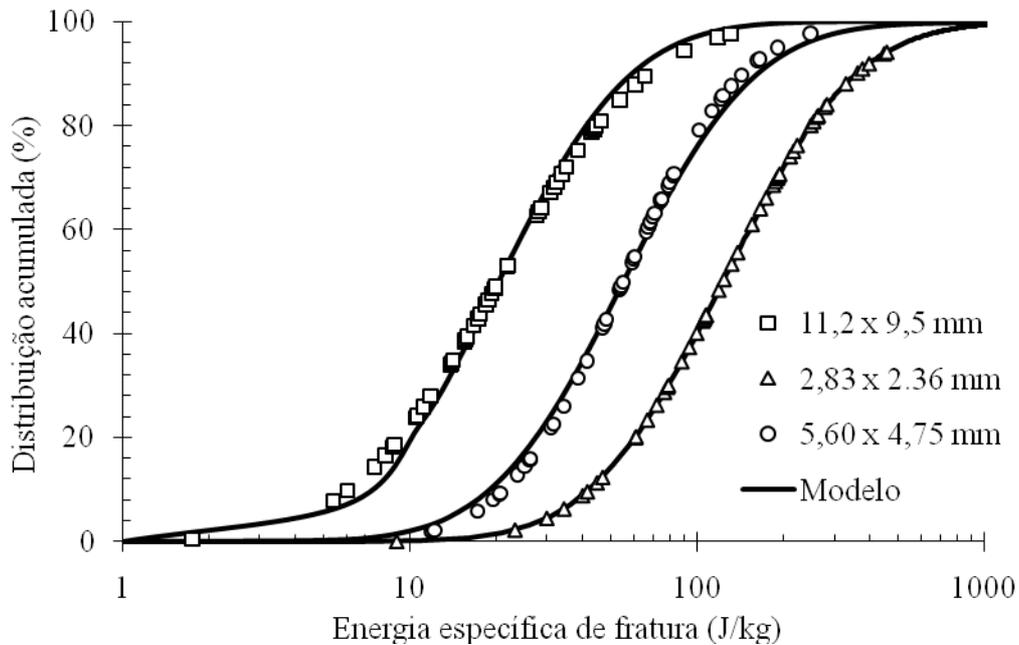


Figura IV-2. Distribuição da energia de fratura para diferentes tamanhos de partícula do Calcário Cantagalo.

A fim de ajustar os parâmetros da Equação III-3 que representa a curva de E_{50} versus tamanhos de partícula da Figura IV-3, é necessário saber como é o comportamento da energia de fratura para tamanhos de partícula menores que 2,3 mm. Um dos desafios do ensaio de fratura de partículas individuais é a dificuldade de obter dados de energia de fratura para partículas com tamanho menor que 2,3 mm, já que a CCI apresenta uma resolução limitada e o manuseio das partículas se torna muito difícil. Uma forma para obter os parâmetros do modelo, é por meio de retrocálculo a partir de dados do ensaio de quebra de leitos com barra. A metodologia usada nesse caso é analisada em maior detalhe no item IV.2.1.

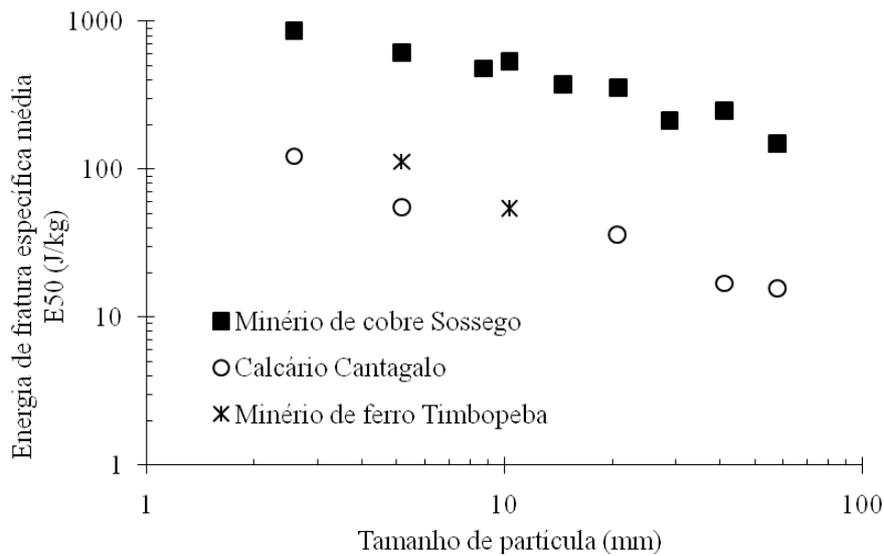


Figura IV-3. Energia de fratura específica para diferentes tamanhos de partícula e diferentes materiais.

IV.1.2 Ensaio de fragmentação de partículas

A Figura IV-4 apresenta as análises granulométrica dos fragmentos gerados na fratura primária de partículas individuais do ensaio de fragmentação de partículas DWT, aplicando diferentes energias específicas de impacto.

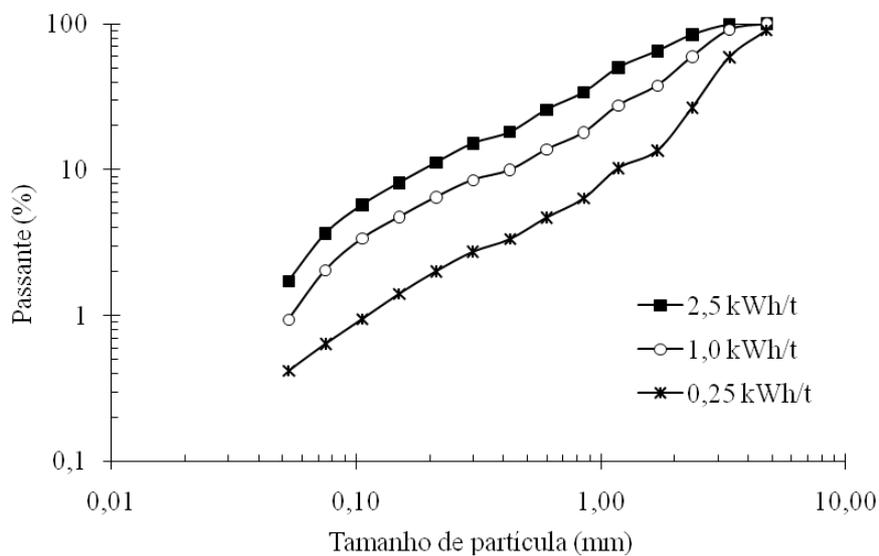


Figura IV-4. Função quebra de partículas individuais de 5,30 x 4,75 mm de minério de cobre Sossego, aplicando diferentes energias de impacto.

A partir dos dados de quebra de partículas individuais é possível correlacionar a energia específica de impacto com o parâmetro t_{10} para diferentes tamanhos de partícula, como pode observar-se na Figura IV-5.

O modelo de Tavares e King (1998) da Equação III-5 considera que a resistência ao impacto das partículas varia com o tamanho das mesmas. Porém, o modelo propõe correlacionar o parâmetro t_{10} com a razão entre a energia específica de impacto E_{cs} e a energia de fratura específica média das partículas E_{50} . Na Figura IV-6 podem ser observados os dados experimentais e o ajuste do modelo.

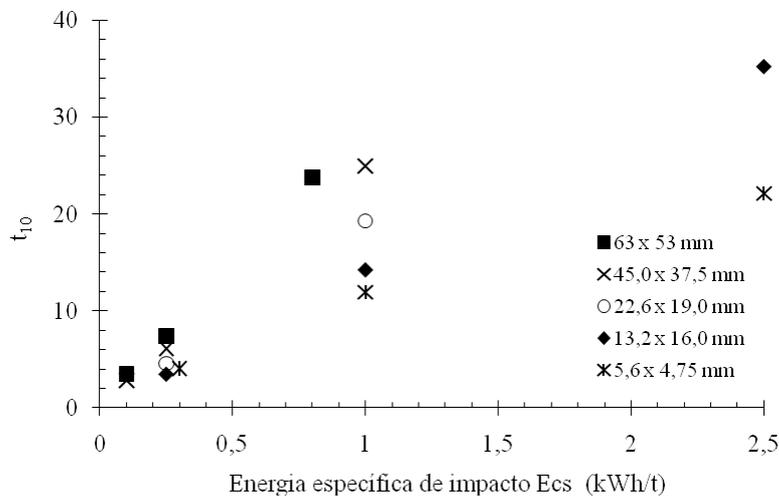


Figura IV-5. Parâmetro t_{10} para diferentes energias de impacto e diferentes tamanhos de partícula do minério de cobre de Sossego.

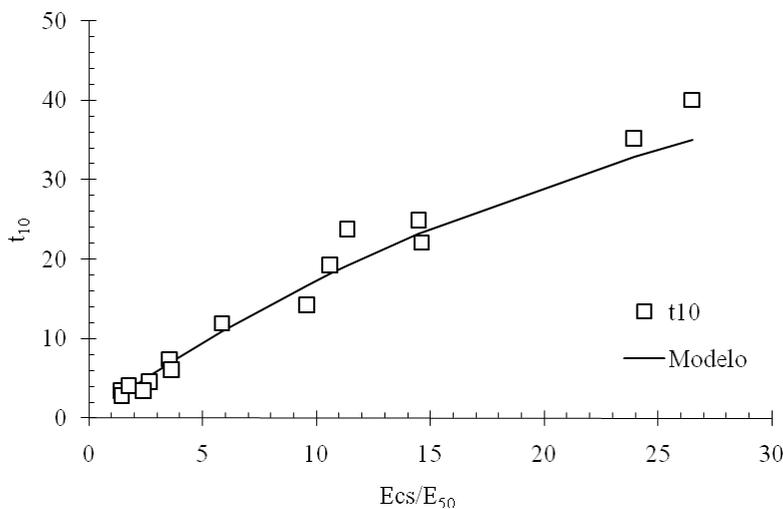


Figura IV-6. Dados experimentais e ajuste do modelo do parâmetro t_{10} versus a razão entre a energia específica de impacto E_{cs} e a energia de fratura específica média das partículas E_{50} para o minério de cobre de Sossego.

Para obter a função quebra completa dos materiais testados neste trabalho, se ajustaram os dados experimentais da relação de t_{10} versus t_n com a função beta incompleta (Figura IV-7). Adicional a os parâmetros α_n e β_n da função beta, o modelo da função quebra utiliza dois parâmetros que são o tamanho de partícula onde começa a inflexão da função quebra d_p^* e a inclinação da função quebra ft_n , para descrever a região da função quebra onde apresenta um comportamento não normalizável.

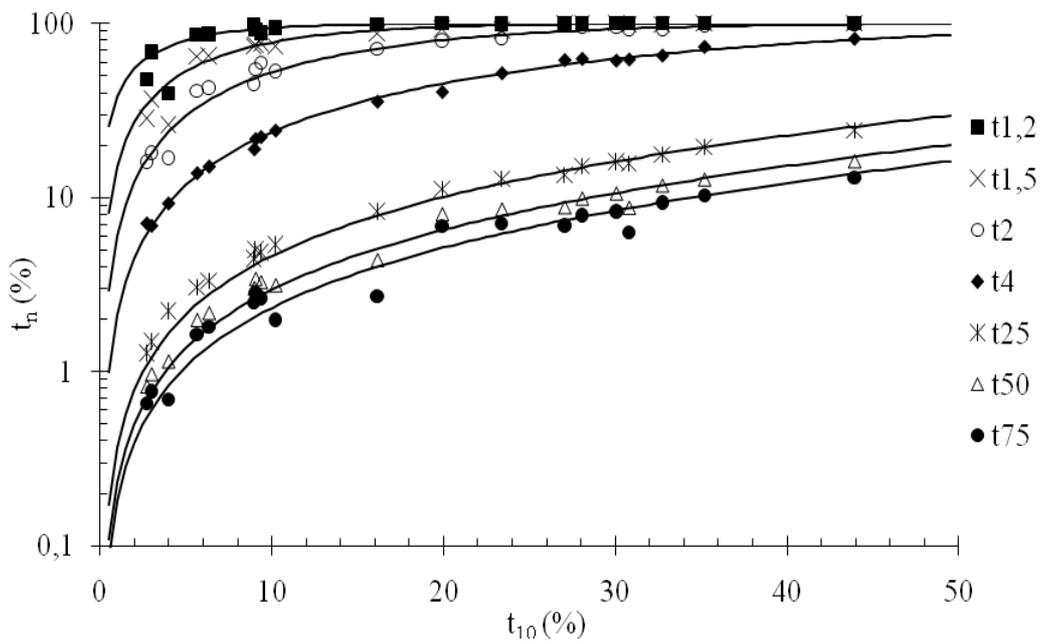


Figura IV-7. Dados experimentais da relação de t_{10} versus t_n para o minério de cobre (pontos) e ajuste da função beta incompleta (linhas).

A Tabela IV-1 apresenta os parâmetros do modelo ajustados com os dados experimentais do ensaio de fragmentação de partículas individuais DWT. Estes parâmetros, junto aos dados de energia de fratura, são indispensáveis para poder simular diferentes processos de cominuição com base na Modelagem Generalizada da Cominuição.

Tabela IV-1. Parâmetros do modelo da função quebra obtidos a partir dos ensaios de fragmentação de partículas

	Cobre Sossego		Calcário Cantagalo		Ferro Timbopeba		Quartzo Bourgeois	
	alfa	beta	alfa	beta	alfa	beta	alfa	beta
Função quebra	1,13	22,82	1,12	23,12	0,99	6,01	0,01	2,31
	1,47	19,08	1,16	14,02	1,00	4,97	0,18	2,31
	1,17	8,39	1,10	7,89	1,09	3,90	0,46	2,31
	1,04	2,69	1,03	2,79	1,35	2,60	0,73	1,41
	0,99	0,49	1,05	0,45	0,91	0,55	1,17	0,58
	0,97	0,32	1,08	0,22	0,92	0,43	1,35	0,39
	0,95	0,23	1,21	0,19	0,94	0,39	1,39	0,30
Inflexão da função quebra dp^* (mm)	0,15		0,08		0,10		-	
Inclinação da inflexão fn	0,7023		0,9102		0,6440		-	
Parâmetro $t_{10 \max}$	56,3		54,1		60,4		38,8	
Parâmetro β	0,0380		0,0310		0,0510		0,0176	

IV.2 Caracterização de partículas em leitos

IV.2.1 Quebra de leitos por impacto com barra

Como foi mencionado anteriormente, o objetivo dos ensaios de quebra de leitos é a caracterização da energia de fratura mediana E_{50} de partículas com tamanhos finos de partículas. O ensaio é baseado na hipótese de que todas as partículas de um leito monocamada recebem a mesma fração de energia de impacto quando são carregadas com um impactor plano.

A Figura IV-8 apresenta a comparação que se realizou entre as funções quebra de partículas impactadas com um impactor plano com a mesma energia específica, de forma individual e quando se encontram formando leitos.

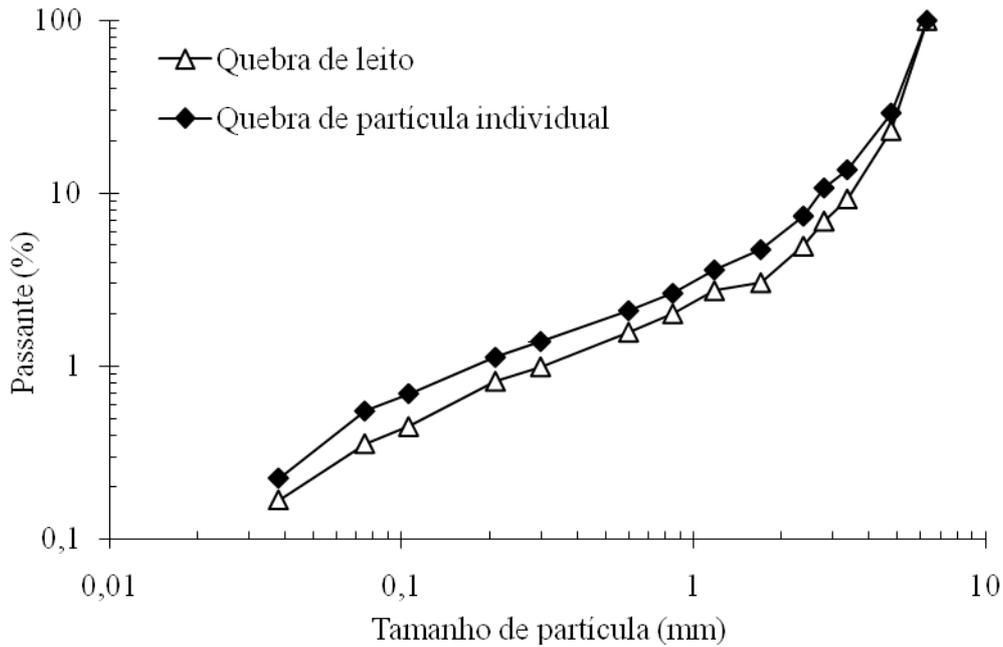


Figura IV-8. Quebra de partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego, com energia específica de impacto de 0,18 kWh/t, utilizando um impactor plano e diferentes condições de carregamento.

Na Figura IV-8 se observa que as funções quebra são muito parecidas, o que quer dizer que o efeito das partículas formando leitos não é tão significativo como o efeito da energia de impacto. O parâmetro t_{10} corresponde a 1,6 para o leito e 2,0 para a partícula individual, a diferença entre os parâmetros t_{10} sugere que existe um efeito menor de dissipação de energia o que faz que a função quebra do leito gere menor quantidade de finos em comparação com a quebra das partículas individuais.

A Equação IV-1 representa o balanço de massas para a classe de tamanho i relativo a um único evento de quebra de partículas de um leito monocamada monodisperso.

Desaparecimento das partículas da classe i Aparecimento das partículas na classe i

$$w_i^* = w_i - \frac{1}{M} [w_i m_i [1 - b_{ii}(eE)] F_i(eE)] + \frac{1}{M} \left[\sum_{j=1}^i w_j m_j b_{ij}(eE) F_j(eE) \right] \quad \text{Equação IV-1}$$

sendo w_i a fração de material na classe i antes do evento de quebra e w_i^* a fração de material na classe i depois do evento de quebra. M é massa total de partículas que compõem o leito, E é a energia de impacto em Joules.

A massa de material contido na classe de tamanhos i que é capturada no evento (m_i) é igual à massa do leito M . Já que todas as partículas do leito são capturadas pelo impactor plano, a fração da energia de impacto e que cada partícula capturada recebe é igual para todas as partículas do leito e é representada pela Equação IV-2, sendo $N_{p_{cap\ i}}$ o número de partículas que compõem o leito.

$$e = \frac{1}{N_{p_{cap\ i}}} \quad \text{Equação IV-2}$$

O termo F_i representa a probabilidade de quebra de uma partícula da classe i quando recebe uma energia de magnitude eE no evento de quebra, que é equivalente à distribuição de energias de fratura. A probabilidade F_i é função da energia de fratura específica média E_{50} , a qual é calculada a partir dos parâmetros E_{∞} , d_0 e ϕ do modelo de Tavares (2007).

A partir dos dados experimentais de quebra de leitos com barra e os dados simulados com o modelo apresentado é possível retrocalcular os valores de E_{50} em função do tamanho de partícula com o procedimento descrito na Figura IV-9. A Figura IV-10 apresenta os dados experimentais (pontos) e os dados simulados (linha continua) para os ensaios de quebra de leitos com barra.

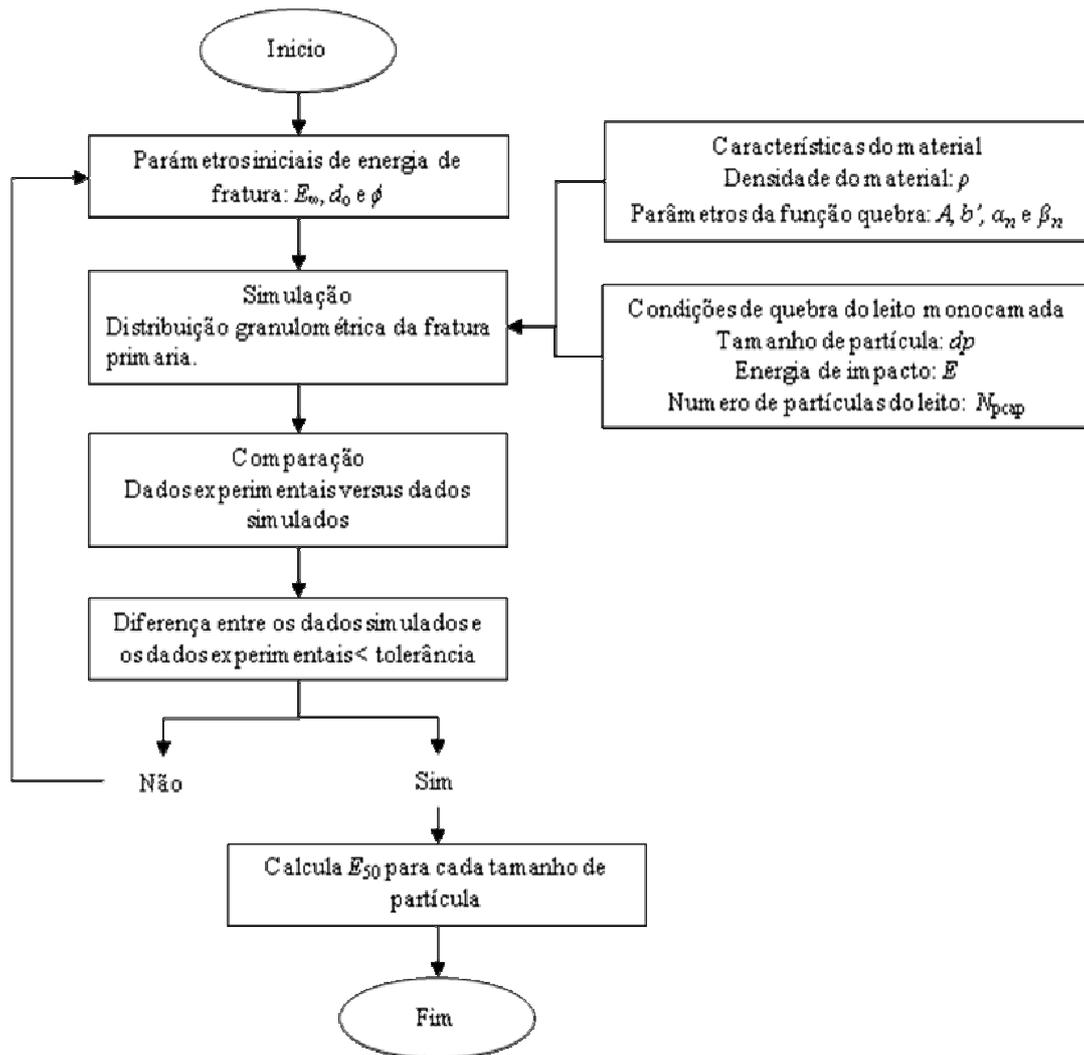


Figura IV-9. Esquema da estimação da energia de fratura a partir dos dados de quebra de leitos com barra.

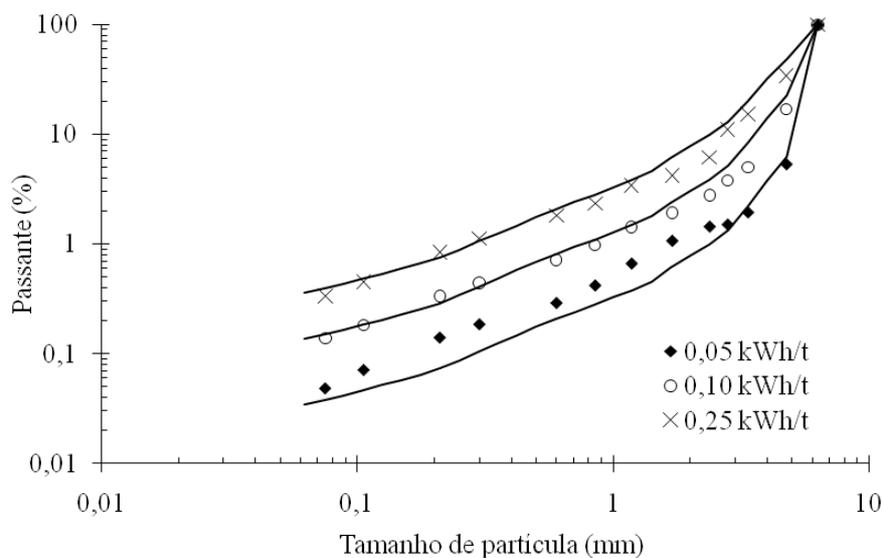


Figura IV-10. Dados experimentais e simulação para o ensaio de quebra de leitos com impactor plano, para partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego.

A Figura IV-11 apresenta os dados de E_{50} para diferentes materiais, obtidos nos ensaios de quebra de leitos e quebra de partículas individuais na CCI, e o modelo de ajuste para cada material com os parâmetros da Tabela IV-2.

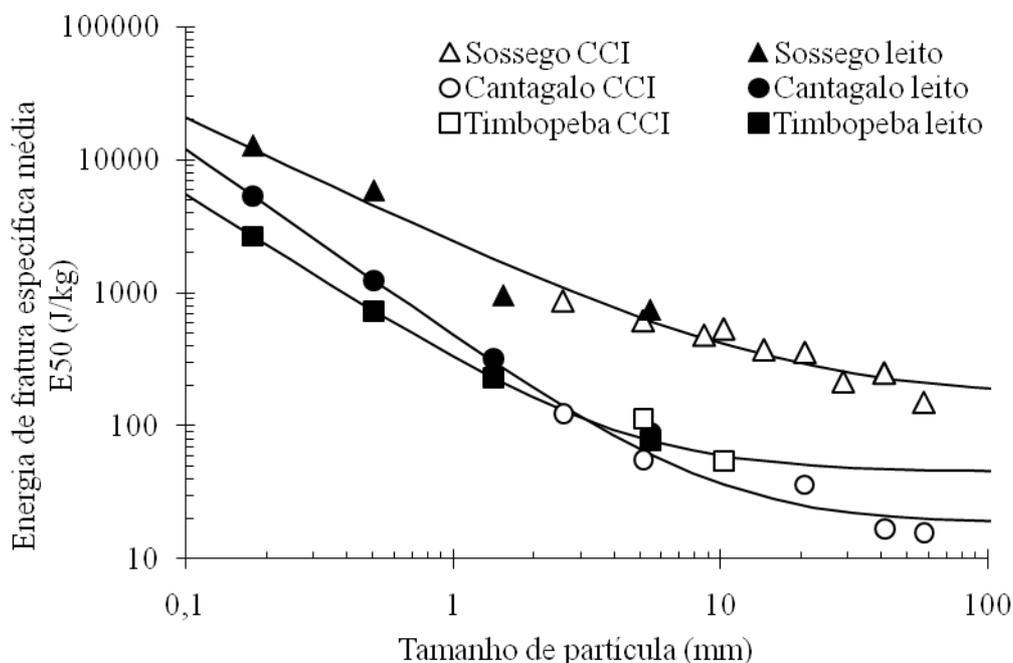


Figura IV-11. Dados de E_{50} em função do tamanho de partícula para diferentes materiais e modelo de ajuste para dados de quebra individual na CCI e quebra em leitos com barra.

Tabela IV-2. Parâmetros de ajuste do modelo de E_{50} em função do tamanho de partícula para diferentes materiais.

Parâmetros	Cobre Sossego	Calcário Cantagalo	Ferro Timbopeba	Quartzo Bourgeois
E_{∞}	161,97	18,58	44,92	43,40
d_o	16,13	9,816	4,255	3,480
ϕ	0,95	1,410	1,279	1,610

IV.3 Impressão de leitos

O objetivo principal dos ensaios de impressão de leitos foi observar a variação do raio de captura para impactos em leitos monocamada com partículas de diferentes tamanhos, corpos moedores de diferentes diâmetros e diferentes energias de impacto. O raio de captura r_c se define como o raio máximo atingido pelo impacto do corpo moedor sobre o leito.

A fim de medir diretamente o raio de captura foram analisadas digitalmente as impressões em papel carbono de impactos realizados em diferentes condições. Um exemplo da análise da impressão de leitos pode ser observado na Figura IV-12.

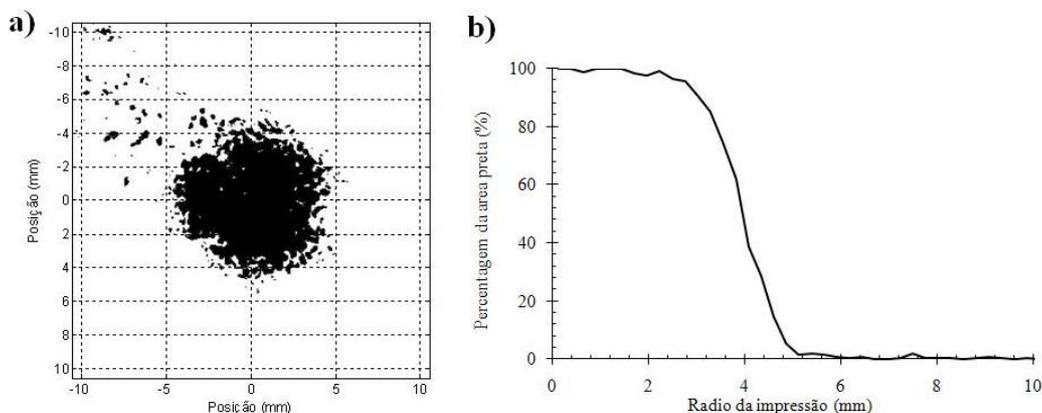


Figura IV-12. a) Impressão do impacto de uma bola de 88 mm sobre um leito monocamada com partículas de 0,600 x 0,425 mm com uma energia de impacto de 1,52 J. b) Análise digital da impressão de leitos para determinar o raio de captura.

Com as análises de várias impressões de leitos para cada condição de carregamento, foi estimado um raio de captura para cada condição. Na Figura IV-13 se pode observar como o raio de captura aumenta significativamente com o tamanho das partículas do leito monocamada mantendo a energia de impacto constante.

Na Figura IV-14 se pode observar o efeito da energia de impacto sobre o raio de captura para leitos de diferentes tamanhos de partículas, sendo o aumento mais notório nas partículas de 6,30 x 4,75 mm.

Por ultimo, se analisou o efeito do diâmetro da bola sobre o raio de captura, como se pode observar na Figura IV-15. O diâmetro do corpo moedor é a variável que mais influencia no raio de captura do impacto no leito, já que ambas variáveis estão relacionadas geometricamente.

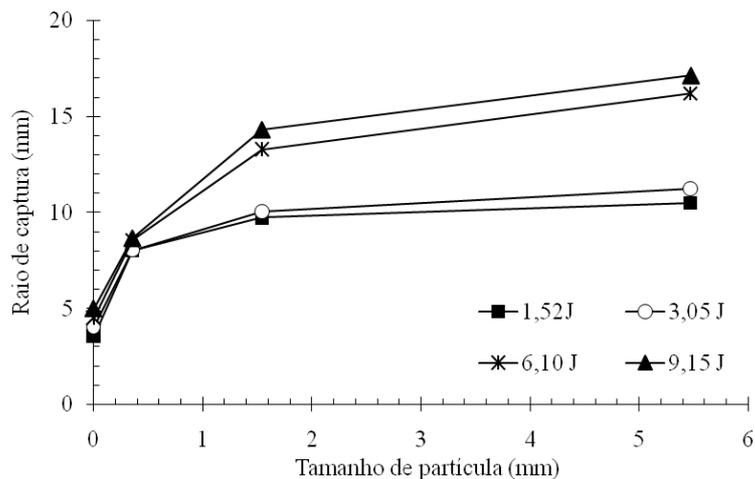


Figura IV-13. Raio de captura versus tamanho de partícula, para leitos de minério de cobre de Sossego com diferentes energias de impacto e diâmetro de bola de 88 mm.

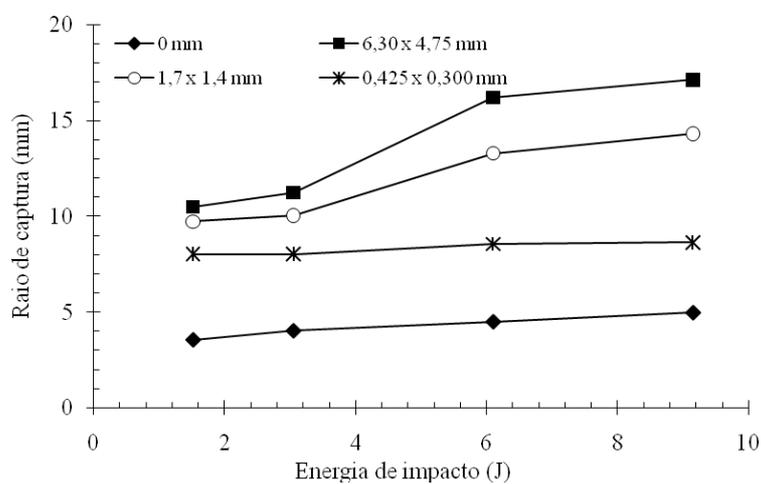


Figura IV-14. Raio de captura versus energia de impacto, para leitos de diferentes tamanhos de partículas do minério de cobre de Sossego e diâmetro de bola de 88 mm.

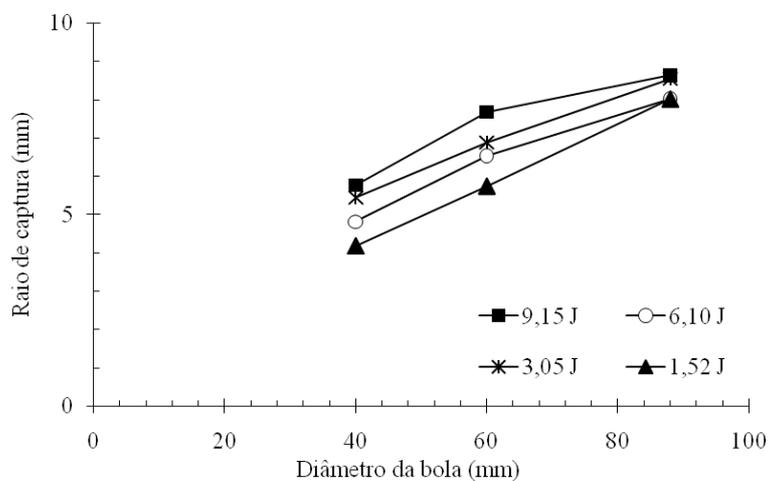


Figura IV-15. Raio de captura diâmetro de bola, para leitos de tamanho de partícula de 0,425 x 0,300 mm do minério de cobre de Sossego e diferentes energias de impacto.

IV.4 Simulação com EDEM

As simulações com o programa EDEM auxiliaram na observação da variação do raio de captura, para impactos em leitos monocamada com partículas de diferentes tamanhos, corpos moedores de diferentes diâmetros e diferentes energias de impacto.

A Figura IV-16 apresenta um dos gráficos gerados pelo programa EDEM que relaciona a energia absorvida pelas partículas no momento do impacto em diferentes posições do raio do leito r_L . O modelo de impacto em leitos simulado no EDEM indicou que o raio de captura varia de forma geométrica com o diâmetro da bola e com o tamanho das partículas do leito como se pode observar na Figura IV-17. Raio de captura em função do tamanho de partícula para simulações de impacto em leitos monocamada de material “Rock”, com bolas de material “Steel” de diferentes diâmetros, com energia de impacto de 3,05 J, estimado usando EDEM. Figura IV-17, mas o modelo não é capaz de prever o aumento do raio de captura com o aumento da energia de impacto, observado nos ensaios nos quais o diâmetro da impressão foi medido diretamente.

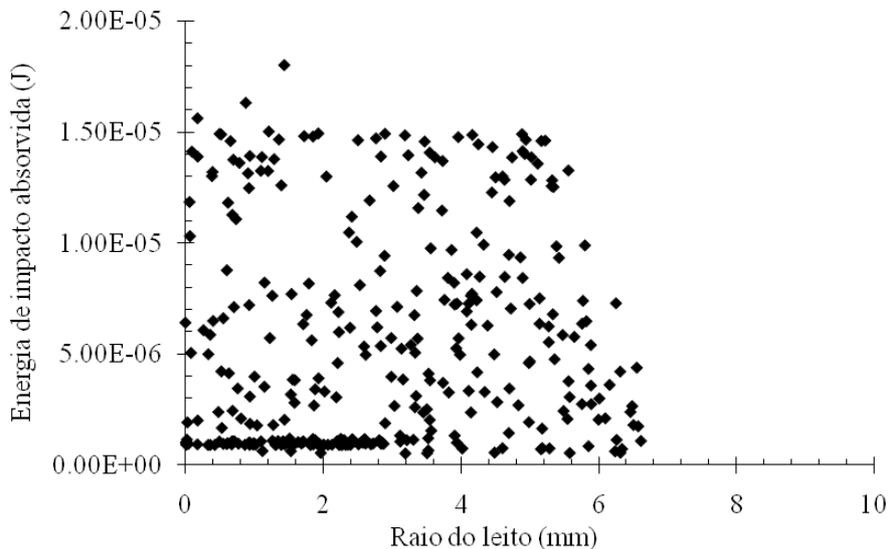


Figura IV-16. Energia de impacto absorvida em função do raio do leito, para partículas de 0,5 mm de material “Rock” impactadas com uma bola de 88 mm de material “Steel” com energia de impacto de 3,05 J, obtida por EDEM.

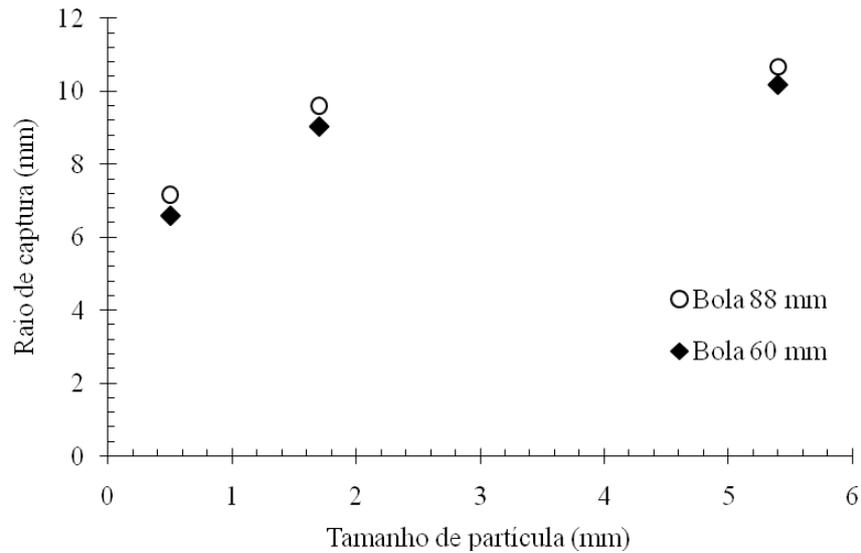


Figura IV-17. Raio de captura em função do tamanho de partícula para simulações de impacto em leitos monocamada de material “Rock”, com bolas de material “Steel” de diferentes diâmetros, com energia de impacto de 3,05 J, estimado usando EDEM.

O modelo de impacto em leitos simulado, também fornece subsídios para a avaliação da repartição da energia de impacto entre as partículas capturadas. Os resultados obtidos são uma evidência de que a energia de impacto não é igualmente repartida nas partículas capturadas no leito monocamada. As Figuras abaixo representam o número de partículas capturadas no impacto e as diferentes quantidades de energia de impacto que as partículas absorveram.

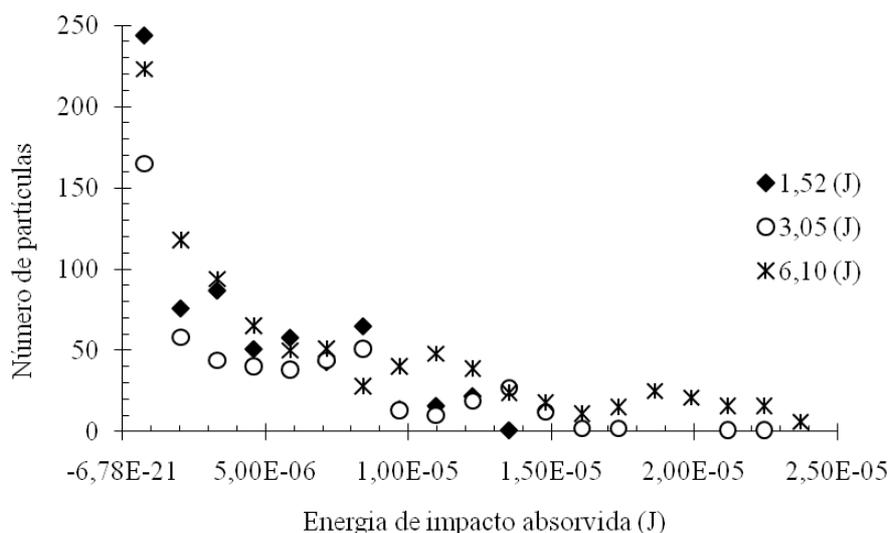


Figura IV-18. Número de partículas versus energia de impacto absorvida, para partículas de 0,5 mm de material “Rock” impactadas com uma bola de 88 mm de material “Steel” com diferentes energias de impacto.

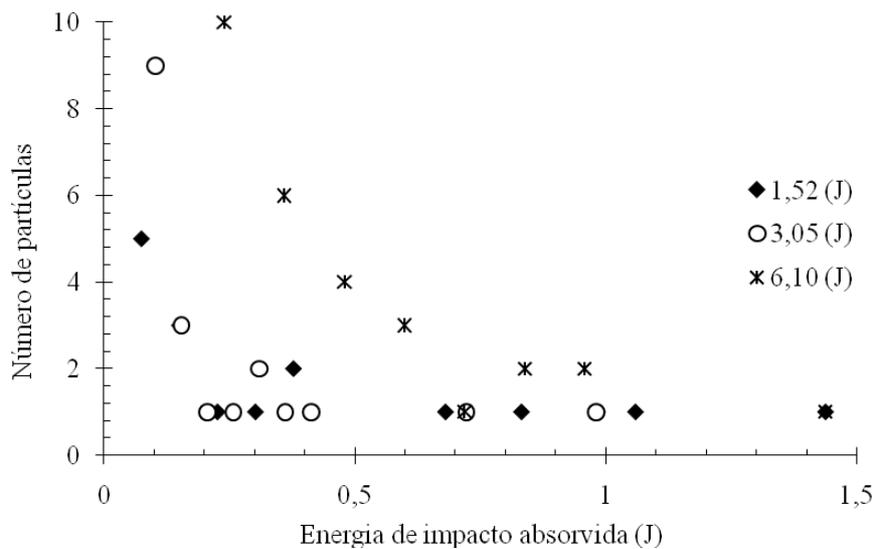


Figura IV-19. Número de partículas versus energia de impacto absorvida, para partículas de 5,4 mm de material “Rock” impactadas com uma bola de 88 mm de material “Steel” com diferentes energias de impacto.

É possível observar que poucas partículas recebem energias de impacto altas, o que corresponde às partículas que se encontram posicionadas próximas ao centro do leito e que recebem um impacto direto da bola. Por outro lado, há um maior número de partículas que recebem uma energia muito baixa, o que corresponde às partículas que se encontram mais distantes do centro do impacto.

IV.5 Quebra de leitos monocamada

IV.5.1 Ensaios de quebra de leitos com bola

Dentro dos equipamentos de moagem as partículas recebem a energia de impacto dos corpos moedores quando se encontram formando arranjos de partículas que são denominados leitos (Figura IV-20). A maior parte dos estudos de modelagem matemática de processos de cominuição é baseada na quebra de partículas individuais, a qual desconsidera muitos dos efeitos da quebra de leitos, como o diâmetro dos corpos moedores, o volume de partículas capturadas, o tamanho de partículas dos leitos, o grau de compactação dos leitos e como é repartida a energia de impacto no leito.

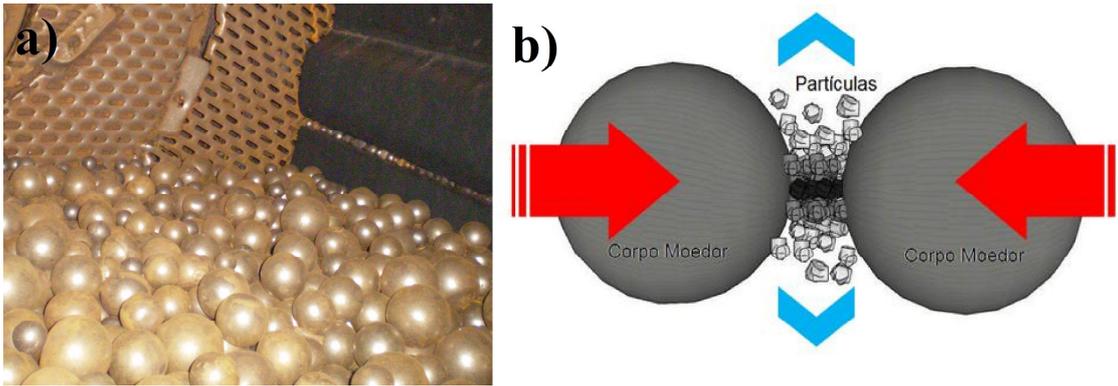


Figura IV-20. a) Imagem do interior de um moinho de bolas, mina VALE Alegria, Mariana – MG. b) Detalhe do mecanismo de impacto de leitos dentro do moinho de bolas.

Nos ensaios de quebra em leitos utilizando impactores esféricos, foram analisadas as diferentes variáveis que poderiam influenciar na função quebra.

Na primeira análise se repetiu varias vezes o mesmo experimento para avaliar o erro experimental para monocamadas com dois anéis de partículas de tamanho 6,30 x 4,75 mm. A Figura IV-21 apresenta a resultado do ensaio de quebra de leitos utilizando um corpo moedor esférico, para este ensaio o coeficiente de variação médio foi de 19,2%.

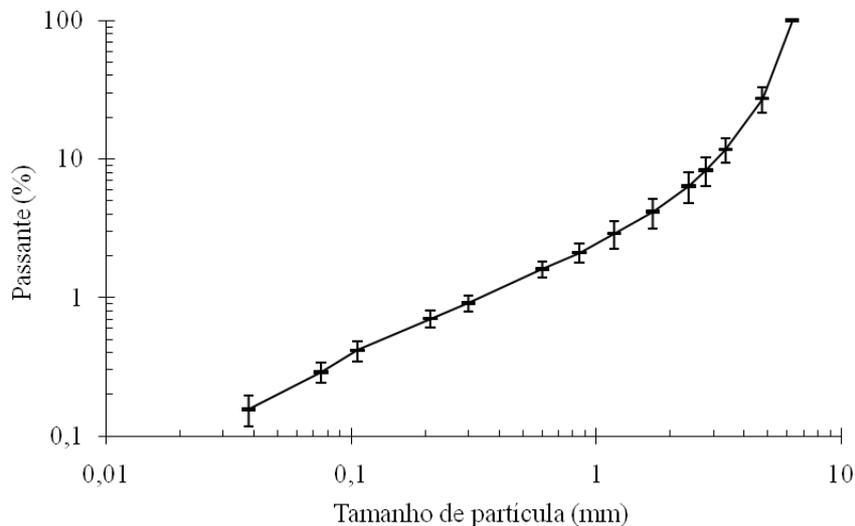


Figura IV-21. Erro experimental para a quebra de leitos monocamada de dois anéis com partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego com energia de impacto de 3,05 J e bola de 88 mm.

Outra das variáveis analisadas foi o tipo de impactor utilizado. A Figura IV-22 indica novamente que a função quebra dos materiais está fortemente ligada à energia de

impacto. Entretanto, é possível observar um efeito na geração de partículas finas principalmente na quebra de leitos com bola. O efeito do diâmetro do corpo moedor se torna mais significativo para leitos com partículas de tamanhos mais finos, como pode se observar na Figura IV-23.

O efeito da geometria do impactor é importante, uma vez que ele determina a fração da energia de impacto que as partículas irão receber, sendo que as partículas do leito que se encontram no centro do impacto recebem uma fração maior que as que se encontram na periferia.

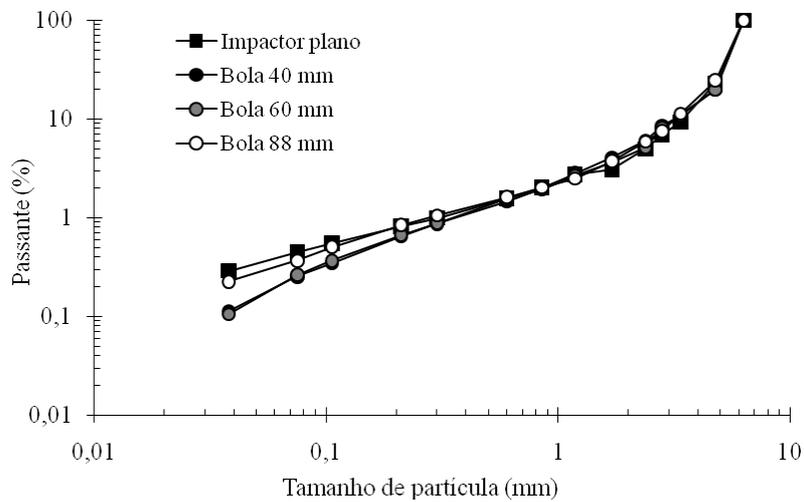


Figura IV-22. Quebra de monocamadas de partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego, com energia de impacto de 3,05 J, utilizando diferentes impactores.

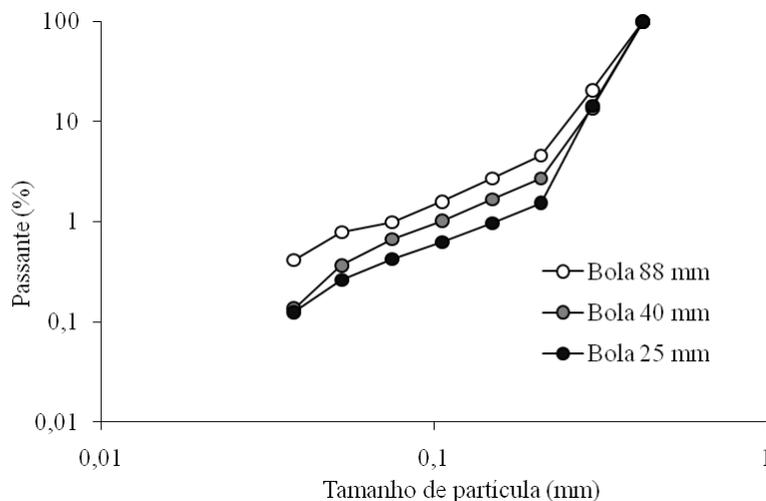


Figura IV-23. Quebra de monocamadas de partículas de 0,425 x 0,300 mm de calcário Cantagalo, com energia de impacto de 3,05 J, utilizando diferentes impactores.

O grau de compactação do leito é muito importante, já que ele determina principalmente o número de partículas capturadas em um volume definido. A Figura IV-24 representa o esquema dos leitos empacotados e não empacotados usados para o ensaio de grau de compactação. A Figura IV-25 mostra a função quebra de um leito compacto e de um leito não compacto, impactados de forma que todas as partículas são capturadas e os leitos recebem a mesma energia específica de impacto.

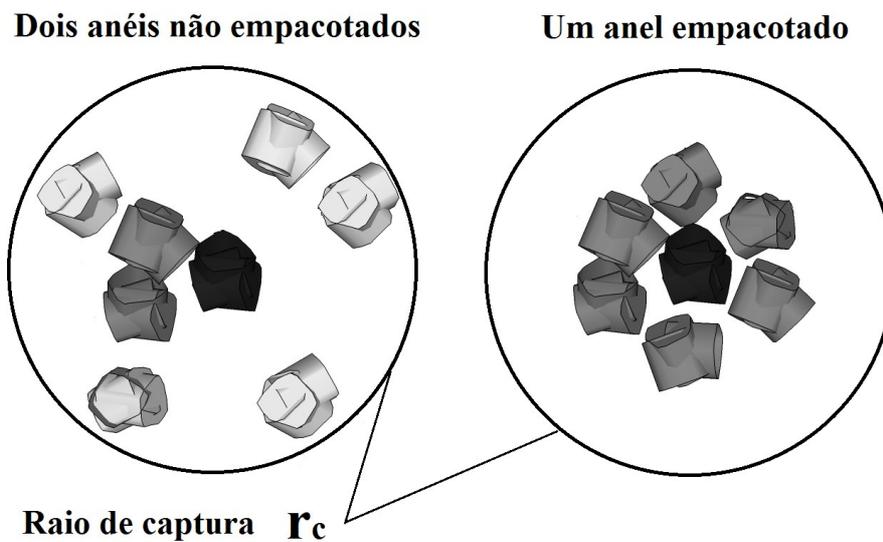


Figura IV-24. Esquema dos leitos de um anel empacotado e dois anéis não empacotados.

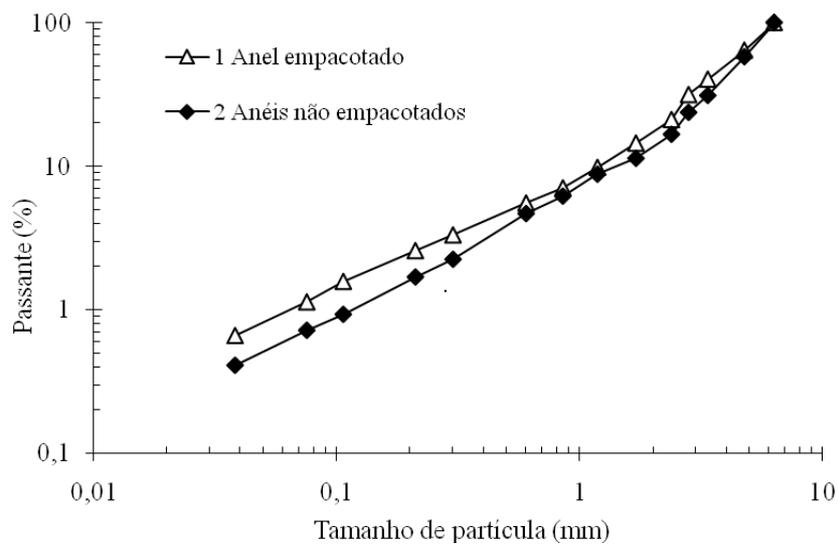


Figura IV-25. Quebra de monocamadas de partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego, com energia de impacto de 3,05 J, diâmetro da bola de 88 mm e diferentes graus de compactação do leito.

O resultado é que a quebra dos leitos é semelhante, já que todas as partículas do leito se encontram dentro do raio de captura do corpo moedor. Existe uma menor geração de partículas finas na quebra do leito não compactado, já que as partículas que se encontram mais afastadas do centro do impacto e recebem uma fração menor de energia de impacto.

Os resultados mostram que a energia de impacto é um dos efeitos mais importantes dentro da quebra de leitos monocamada de diferentes tamanhos de partícula.

Na Figura IV-26 se observa a quebra mais intensa quando se utiliza energia de impacto de maior magnitude para um mesmo material e diferentes tamanhos de partícula do leito monocamada.

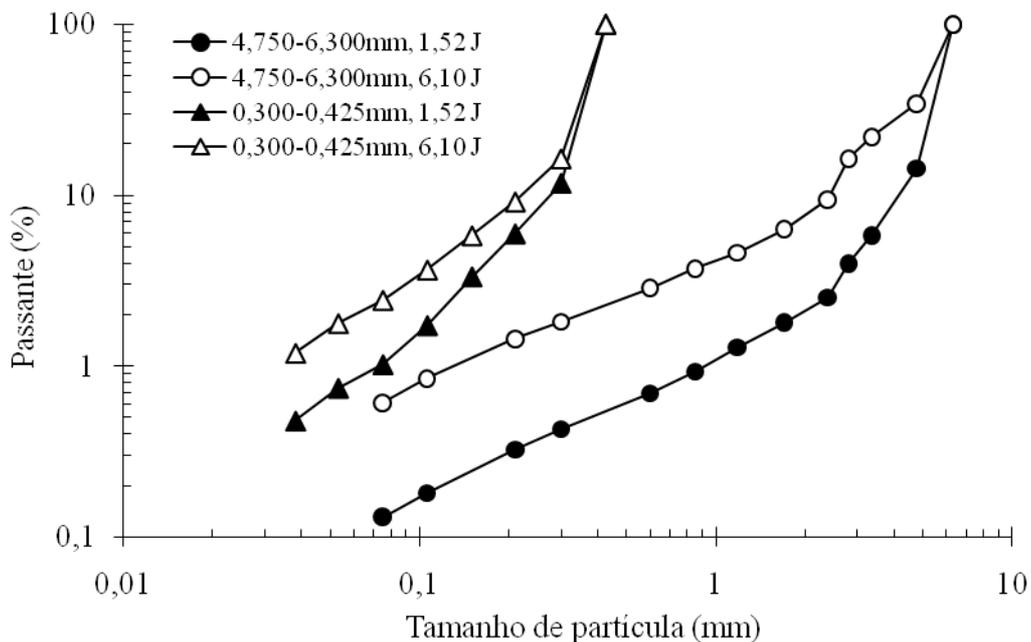


Figura IV-26. Quebra de monocamadas de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto e tamanho de partículas, diâmetro da bola de 88 mm.

Por último se analisou a influência do tipo de arranjo das partículas quando são impactadas com a mesma energia e o mesmo diâmetro de bola. Na Figura IV-27 se observa como a quebra das partículas se torna menos intensa com o aumento de anéis e

de camadas do leito, o que significa que a energia de impacto é repartida entre um maior número de partículas. Também é importante considerar que com o aumento do número de anéis e de camadas existe uma dissipação da energia de impacto devido ao fato que uma fração da energia é consumida como energia cinética de dissipação das partículas que se encontram na periferia dos leitos.

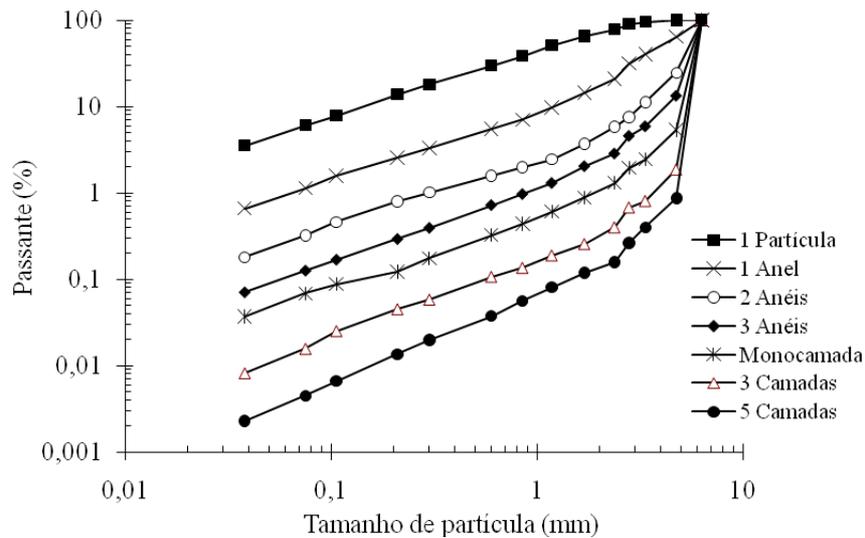


Figura IV-27. Quebra de diferentes arranjos de partículas de minério de cobre de Sossego, para uma energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.

IV.5.2 Modelo matemático da quebra de leitos em monocamada

O modelo desenvolvido no Laboratório de tecnologia Mineral (LTM) simula a quebra ocorrida quando um leito de partículas organizadas em uma monocamada é impactado com uma energia conhecida por um corpo moedor com características também conhecidas (Figura IV-28), tendo como resultado a distribuição granulométrica dos fragmentos. Esse modelo corresponde ao caso particular do modelo generalizado da cominuição (Carvalho e Tavares, 2009) relativo a um único evento de quebra de partículas que compõem um leito, sendo o balanço de massas dado por:

$$w_i^* = w_i - \frac{1}{M} \left[w_i m_i \int_0^1 [1 - b_{ii}(eE)] F_i(eE) p(e) de \right] + \frac{1}{M} \left[\sum_{j=1}^i w_j m_j \int_0^1 b_{ij}(eE) F_j(eE) p(e) de \right] \quad \text{Equação IV-3}$$

sendo w_i a fração de material na classe i antes do evento de quebra e w_i^* a fração de material na classe i depois do evento de quebra. M é massa total de partículas que compõem o leito, E é a energia de impacto em Joules, b_{ij} é a função quebra obtida a partir de ensaios de quebra de partículas individuais por impacto na CCI utilizando o procedimento t_{10} e F_i representa a probabilidade de quebra de uma partícula da classe i quando recebe uma energia de magnitude eE no evento de quebra, que é equivalente à distribuição de energias de fraturado modelo de Tavares e King (2002).

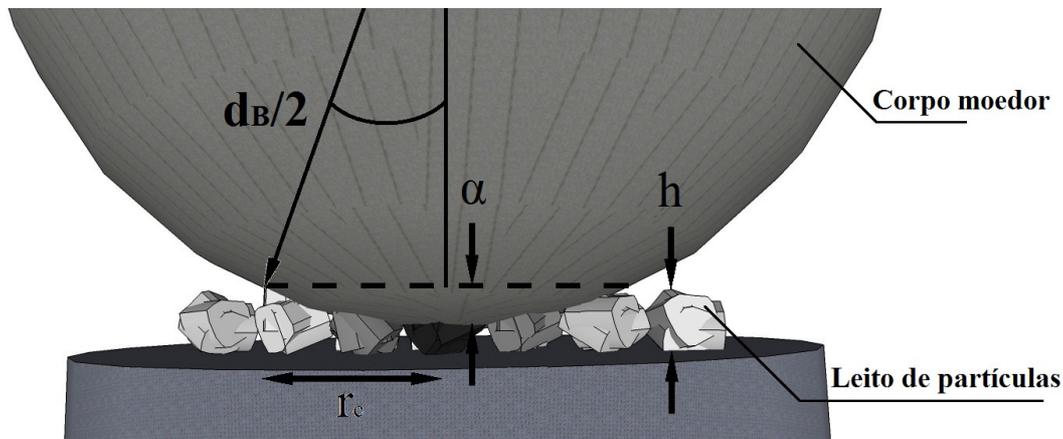


Figura IV-28. Leito de partículas sendo impactado por um corpo moedor sobre uma superfície plana.

As funções que ocupam uma posição de destaque dentro do modelo e que serão analisadas com maior detalhe nesta parte do trabalho são a fração da energia de impacto que cada partícula capturada recebe (e), é a fração mássica das partículas contidas no leito que recebe a fração e da energia de impacto ($p(e)$), e a massa de material contido na classe de tamanhos i que é capturada no evento (m_i).

Para o caso da moagem em moinhos de bolas, no qual os impactos ocorrem entre corpos moedores com geometria esférica, a massa m_i ou volume de material que é capturado em um único evento pode ser estimada a partir de uma análise geométrica do problema. Como foi mencionado anteriormente no II.4.3, Schönert (1988^c), sugeriu que o volume da zona de captura, também chamado de volume ativo (V_A), em um impacto de um leito de partículas posicionadas entre duas bolas é função principalmente do

parâmetro geométrico α_0 que é o ângulo formado entre o eixo da bola e o perímetro do volume ativo. Um modelo similar é adotado no presente trabalho. Uma primeira diferença é que, ao invés do volume ativo, calcula-se a massa de material capturado, a qual, para um leito monodisperso, é função direta do número de partículas capturadas ($Np_{cap\ i}$) por meio de:

$$m_i = \bar{m}_{p,i} Np_{cap\ i} \quad \text{Equação IV-4}$$

Com isso, a questão central se torna a estimação do número de partículas capturadas. Presumindo que as partículas se encontram formando um arranjo hexagonal no leito, o número de partículas capturadas pode ser calculado por:

$$Np_{cap\ i} = f_c \left(0,25 + 0,75 \left(\frac{2r_c}{d_i} \right)^2 \right) \quad \text{Equação IV-5}$$

sendo d_i o tamanho médio de partícula e r_c o diâmetro de captura (Figura IV-28) e f_c o grau de compactação do leito. O raio de captura, por sua vez, é a soma de duas componentes:

$$r_c = r_e + r_g \quad \text{Equação IV-6}$$

A componente r_e se relaciona com a deformação elástica do corpo moedor quando impacta na barra, para o choque de dois corpos o raio de deformação pode ser estimado com a teoria de contato de Hertz (Tavares, 1997) usando a equação:

$$r_e = \left(\frac{15 E}{16 K_e} \right)^{1/5} K_g^{2/5} \quad \text{Equação IV-7}$$

sendo E a energia de impacto, K_e é uma constante geométrica que poder ser calculada usando a equação:

$$K_g = \frac{Rc_1 Rc_2}{Rc_1 + Rc_2} \quad \text{Equação IV-8}$$

A constante K_g é uma constante elástica que poder ser calculada usando a equação (Tavares e King, 2004):

$$K_g = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{Equação IV-9}$$

sendo Rc o raio de curvatura e k a rigidez dos corpos em contato. Para o caso do choque de uma bola ($Rc_1 = d_B/2$) contra uma superfície plana ($Rc_2 \rightarrow \infty$) do mesmo material ($k_1 = k_2 = k_H$) as constantes se tornam:

$$K_g = \frac{d_B}{2} \quad \text{Equação IV-10}$$

$$K_e = \frac{k_H}{2}$$

sendo k_H a rigidez do material, estimada dada pela razão entre o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. Substituindo as Equações IV-11 na Equação IV-8, o raio de contato para o caso de colisão de uma bola contra uma superfície plana do mesmo material é dada por:

$$r_e = \left(\frac{15 E}{16 K_e} \right)^{1/5} K_g^{2/5} \quad \text{Equação IV-11}$$

A componente r_g se relaciona com a geometria do corpo moedor e da barra e poder ser estimado usando a equação:

$$r_g = \sqrt{\left(\frac{d_B}{2} \right)^2 - \left(\left(\frac{d_B}{2} \right) - \left(\frac{\alpha}{h} \right) h \right)^2} \quad \text{Equação IV-12}$$

sendo r_B o diâmetro da bola, h a altura inicial e α a distancia que o corpo moedor entrou no leito após o impacto. Essa equação demanda uma expressão para o cálculo da razão α/h . Essa razão depende da energia de impacto E e da energia de fratura média de uma partícula individual $E_{50,i}$ de tamanho de i , sendo proposta a seguinte expressão para a sua descrição:

$$\frac{\alpha}{h} = a_c \left[1 - \exp \left(- \frac{b_c E}{E_{50,i}} \right) \right] \quad \text{Equação IV-13}$$

O parâmetro α/h descreve a altura remanescente do leito depois do impacto, que tem um efeito direto no raio de captura das partículas no impacto. Na Figura IV-29 se pode observar como muda o raio de captura com a o parâmetro α/h .

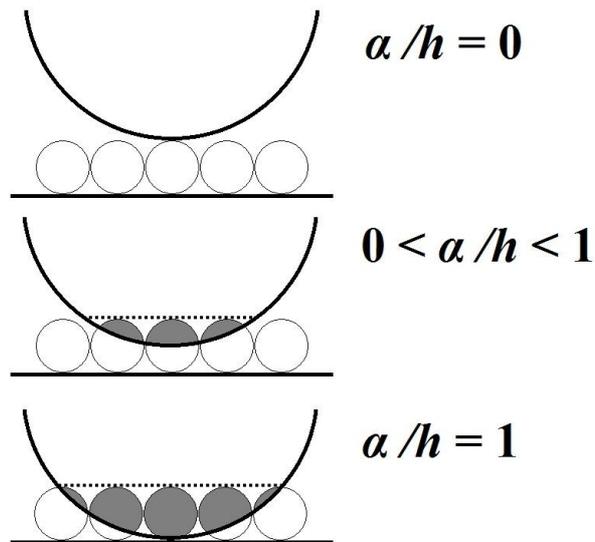


Figura IV-29. Raio de captura para diferentes valores da altura remanescente α/h depois do impacto com bola sobre um leito monocamada.

Para estimar os parâmetros do modelo do raio de captura da Equação IV-13, se ajustaram os dados experimentais do raio de captura obtidos nos ensaios de impressão de leitos, como se pode observar na Figura IV-30. Os valores encontrados foram $a_c = 0,355$ e $b_c = 0,022$.

Na Figura IV-31 se pode observar a comparação dos dados de raio de captura obtido experimentalmente nos ensaios de impressão de leitos e os dados de raio de captura simulados com o modelo da Equação IV-13.

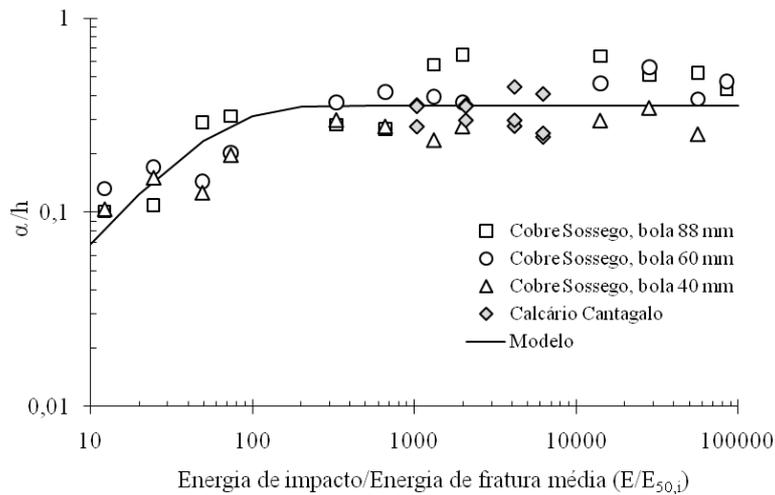


Figura IV-30. Ajuste dos dados experimentais do raio de captura obtidos nos ensaios de impressão de leitos.

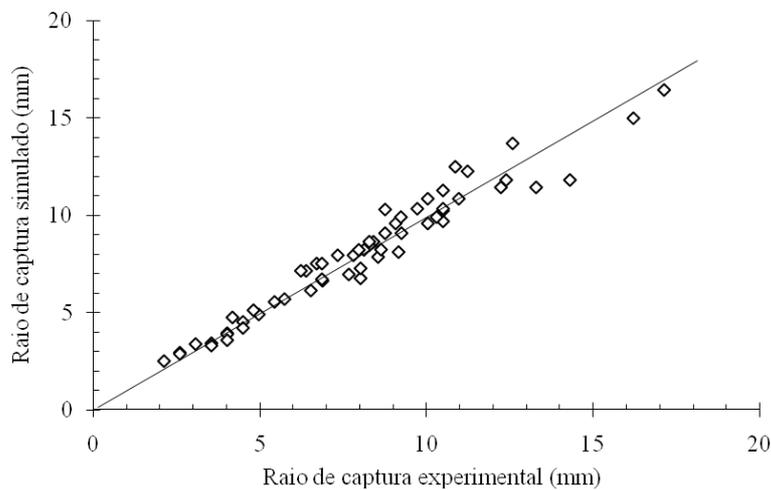


Figura IV-31. Comparação entre os dados experimentais e simulados para o raio de captura.

Na Figuras IV-32 e IV-33 se observa que o modelo de captura de leitos descreve muito bem os dados experimentais de raio de captura obtidos nos ensaios de impressão de leitos para impactos com bolas de diferentes diâmetros. O modelo consegue descrever o efeito da energia de impacto e do diâmetro da bola, mesmo para os ensaios de impressão sem partículas, com ajuda do modelo de contato de Hertz.

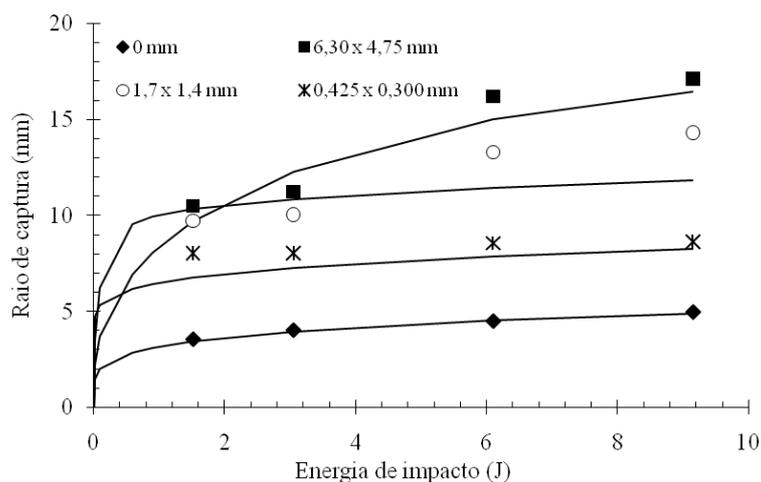


Figura IV-32. Simulação e dados experimentais do raio de captura em função da energia de impacto, para leitos de diferentes tamanhos de partículas do minério de cobre de Sossego e diâmetro de bola de 88 mm.

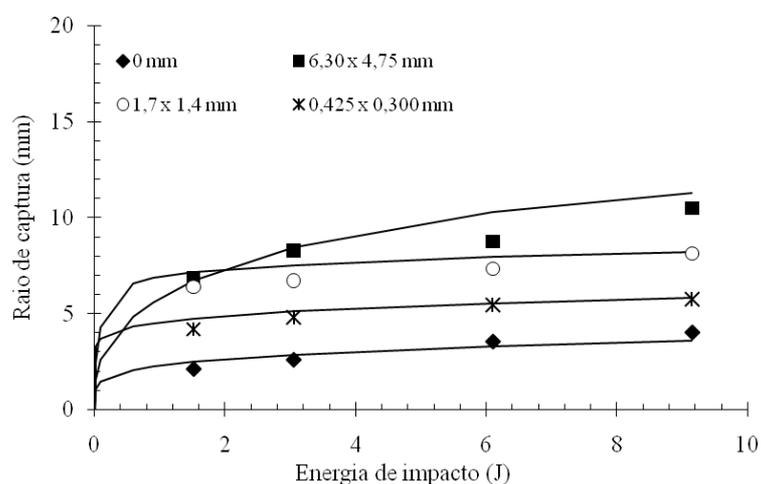


Figura IV-33. Simulação e dados experimentais do raio de captura em função da energia de impacto, para leitos de diferentes tamanhos de partículas do minério de cobre de Sossego e diâmetro de bola de 40 mm.

Uma questão adicional no modelo diz respeito à partição de energia de impacto entre as partículas envolvidas no evento. Tavares e Carvalho (2009), por exemplo, consideraram que a energia de impacto de um corpo moedor esférico é igualmente partilhada por todas as partículas capturadas, representando a função $p(e)$ por meio de uma função delta de Dirac. Isso certamente não é suportado pelas observações experimentais, como foi evidenciado na Figura IV-22. Assim, no presente trabalho é

proposto que a energia de impacto é dividida entre as partículas capturadas em função do raio da zona de impacto (r).

Considerando o modelo geométrico do leito apresentado na Figura IV-28, é possível calcular deformação do leito (α) na direção da aplicação das tensões para o caso do impacto de uma bola sobre uma superfície plana:

$$\alpha(r) = \left[\sqrt{\left(\frac{d_B}{2}\right)^2 - r^2} - \sqrt{\left(\frac{d_B}{2}\right)^2 - r_c^2} \right] \quad \text{Equação IV-14}$$

Considerando que o leito de partículas é conformado por uma monocamada de partículas de tamanho uniforme e que a deformação que cada partícula sofrerá dependerá apenas de sua posição radial no leito, a teoria de contato Hertz (Tavares e King, 2002) comprova que a quantidade de energia elástica absorvida por cada partícula irá aumentar com a deformação, elevado à potência de 2,5. Embora seja uma simplificação excessiva do fenômeno físico, para o caso de uma colisão, as partículas irão deformar e quebrar inelasticamente, e não apenas deformar elasticamente como foi presumido por Hertz na teoria de contato, o modelo oferece uma boa base física para a análise da repartição da energia de impacto no leito. A função que distribui a fração de energia de impacto e que cada partícula recebe em função do raio da zona de impacto é dada pela teoria de Hertz e se denominada função de repartição radial $F(r)$ representada pela expressão:

$$F(r) = \left[\sqrt{\left(\frac{d_B}{2}\right)^2 - r^2} - \sqrt{\left(\frac{d_B}{2}\right)^2 - r_c^2} \right]^{5\alpha_r/2} \quad \text{Equação IV-15}$$

sendo d_B o raio do corpo moedor, r_c o raio de captura que limita o raio da zona de captura r e α_r uma constante do modelo.

A função $F(r)$ é uma função que varia de 0 a 1. Porém, para representar frações da energia de impacto é necessário normalizar a função para obter a função de fração radial de energia de impacto $f(r)$ representada pela expressão:

$$f(r) = \frac{F(r)}{\sum_{r=0}^{r=rc} F(r)} \quad \text{Equação IV-16}$$

$$\int_0^{rc} f(r) = 1$$

A Figura IV-34. representa o comportamento da função de fração radial de energia de impacto em função do raio do leito.

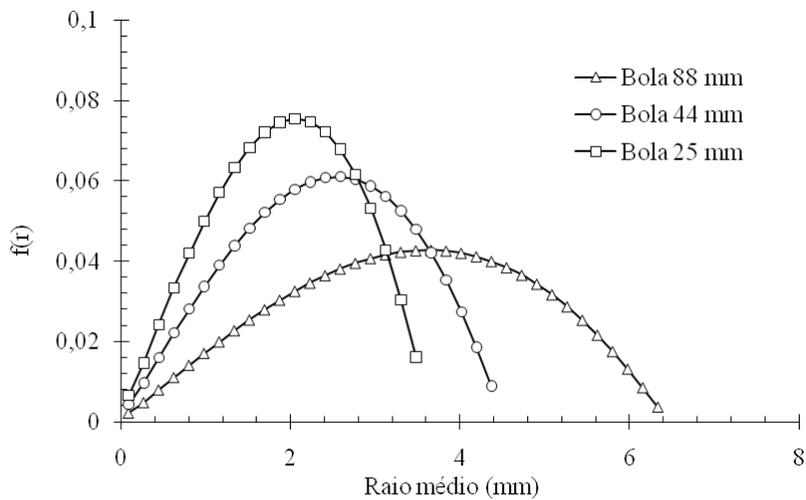


Figura IV-34. Simulação da função de fração radial de energia de impacto $f(r)$ em função do raio de captura para um leito de partículas de 0,600 x 0,425 mm.

Para cada fração da energia de impacto, se tem um numero de partículas capturadas em função do tamanho de partícula d_i e do raio da zona de impacto r , representado pela Equação IV-5. A função $Np_{cap\ i}(r)$ normalizada é calculada com a expressão:

$$np_{cap\ i}(r) = Np_{cap\ i}(r) - Np_{cap\ i}(r+1) \quad \text{Equação IV-17}$$

Com as equações de fração radial de energia de impacto $f(r)$ e numero de partículas em função do raio $np_{cap\ i}(r)$, podemos calcular a fração da energia de impacto

que cada partícula recebe e, e a fração mássica das partículas contidas no leito que recebe a fração e da energia de impacto $p(e)$:

$$e = f_e \left(\frac{f(r)}{np_{cap i}(r)} \right) \quad \text{Equação IV-18}$$

$$p(e) = \frac{np_{cap i}(r)}{Np_{cap i}(r_c)} \quad \text{Equação IV-19}$$

Com o modelo apresentado, é possível descrever a quebra de leitos de monocamada monodispersos impactados por corpos moedores esféricos de diferentes diâmetros e com diferentes energias de impacto.

A seguir são apresentados os resultados das simulações comparados com os dados experimentais de quebra de leitos com bola em diferentes condições de impacto.

As Figuras IV-35 a IV-38 mostram os resultados das simulações de quebra de diferentes arranjos de partículas que vão desde uma partícula individual até uma monocamada com quatro anéis para diferentes materiais.

Os resultados evidenciam que a hipótese do modelo que considera uma repartição radial na zona de impacto fornece um ajuste adequado aos dados experimentais.

Embora o modelo esteja focado na quebra de leitos de monocamada, o modelo também foi capaz de prever a quebra de leitos de varias camadas como se pode observar nas Figuras IV-39 a IV-42, considerando uma dissipação na energia de impacto que pode ser variada com o fator de eficiência f_e da Equação IV-18. Assim, os mesmos parâmetros que caracterizam a captura puderam ser usados na simulação, como se pode observar na Tabela IV-3.

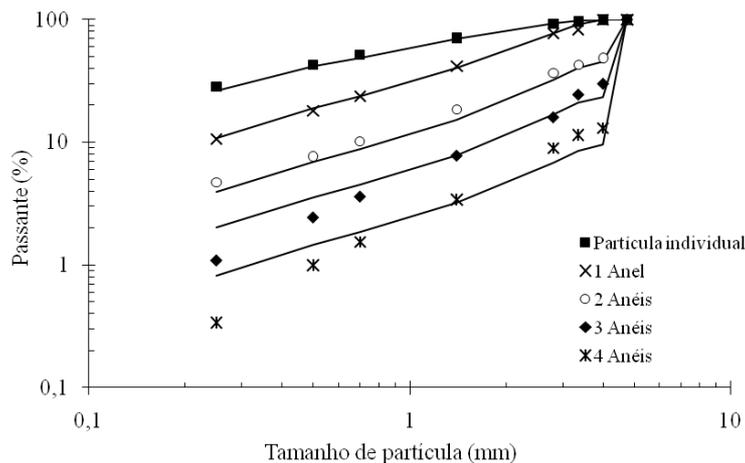


Figura IV-35. Quebra de diferentes arranjos de partículas de quartzo por impacto com bola. Energia de impacto 2,44 J, diâmetro da bola 80 mm, tamanho de partícula 4,00 x 4,75 mm (Bourgeois, 1993).

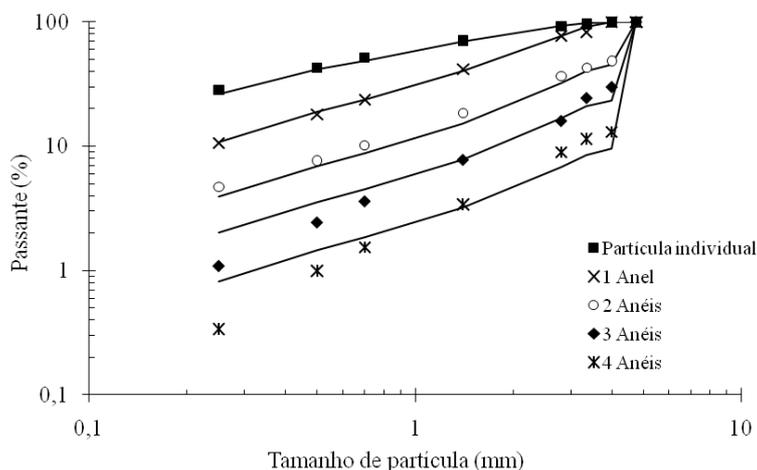


Figura IV-36. Quebra por impacto de diferentes arranjos de partículas de minério de cobre de Sossego por impacto com bola. Energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.

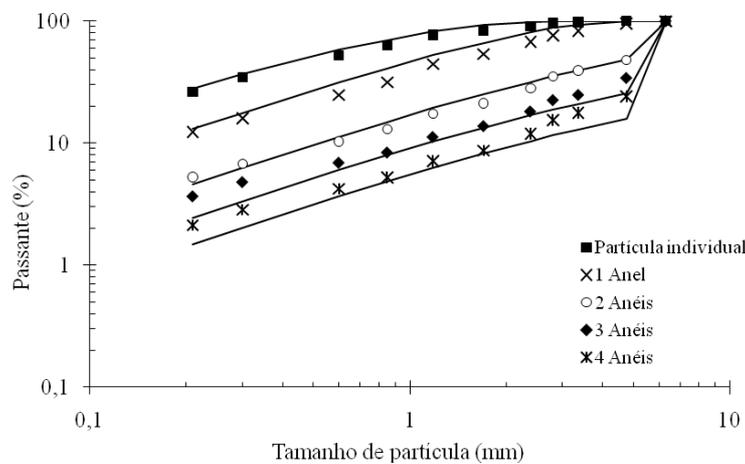


Figura IV-37. Quebra por impacto de diferentes arranjos de partículas de calcário Cantagalo por impacto com bola. Energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.

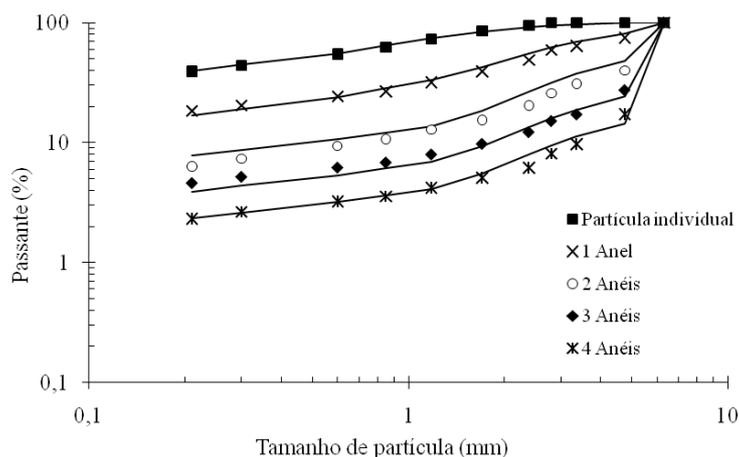


Figura IV-38. Quebra por impacto de diferentes arranjos de partículas de minério de ferro de Timbopeba por impacto com bola. Energia de impacto 3,05 J, diâmetro da bola 88 mm, tamanho de partícula 6,30 x 4,75 mm.

Tabela IV-3. Resultados das simulações de impacto em leitos para diferentes arranjos de partículas e diferentes materiais.

Material	Diâmetro do corpo moedor d_B (mm)	Tamanho de partícula d_i (mm)	Energia de impacto E (J)	Configuração	Número de partículas do leito	Número de partículas capturadas $N_{p_{cap\ i}}$	Fração de energia de impacto efetiva f_e
Quartzo	80	4,75-4,00	2,44	1 Partícula	1	1,0	1,00
	80	4,75-4,00	2,44	1 Anel	7	7,0	1,00
	80	4,75-4,00	2,44	Monocamada	91	8,4	0,60
	80	4,75-4,00	2,44	5 Camadas	455	8,4	0,44
Minério de cobre de Sossego	88	6,30-4,75	3,05	1 Partícula	1	1,0	1,00
	88	6,30-4,75	3,05	1 Anel	7	7,0	1,00
	88	6,30-4,75	3,05	Monocamada	61	22,0	0,90
	88	6,30-4,75	3,05	5 Camadas	305	22,0	0,80
Calcário Cantagalo	88	6,30-4,75	3,05	1 Partícula	1	1,0	1,00
	88	6,30-4,75	3,05	1 Anel	7	7,0	1,00
	88	6,30-4,75	3,05	Monocamada	61	19,2	0,70
Minério de ferro de Timbopeba	88	6,30-4,75	3,05	5 Camadas	305	19,2	0,50
	88	6,30-4,75	3,05	1 Partícula	1	1,0	1,00
	88	6,30-4,75	3,05	1 Anel	7	7,0	1,00
Minério de ferro de Timbopeba	88	6,30-4,75	3,05	Monocamada	61	18,7	0,80
	88	6,30-4,75	3,05	5 Camadas	305	18,7	0,70

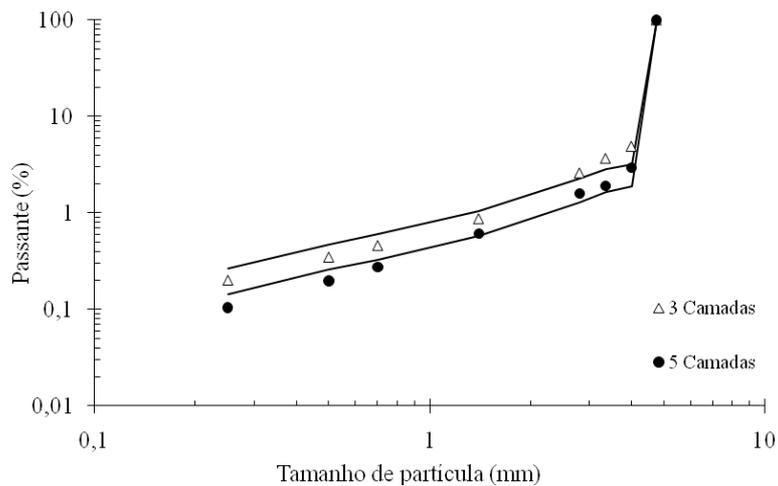


Figura IV-39. Quebra de leitos com varias camadas de quartzo de 4,75 x 4,00 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 80 mm.

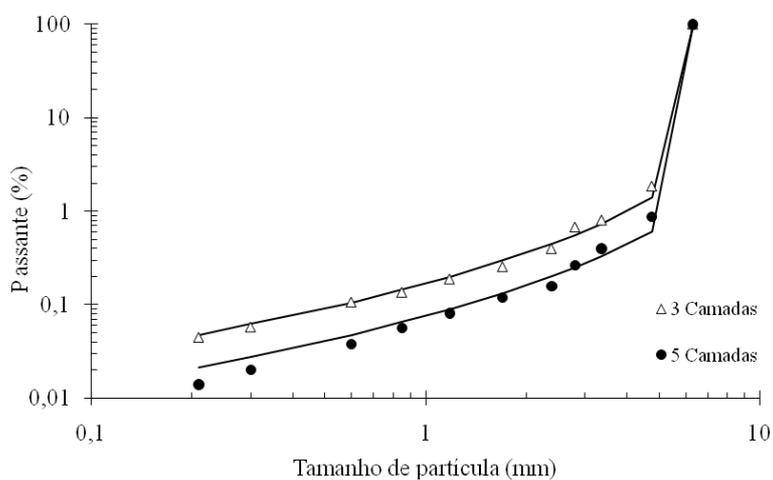


Figura IV-40. Quebra de leitos com varias camadas de minério de cobre de Sossego de 6,30 x 4,75 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 88 mm.

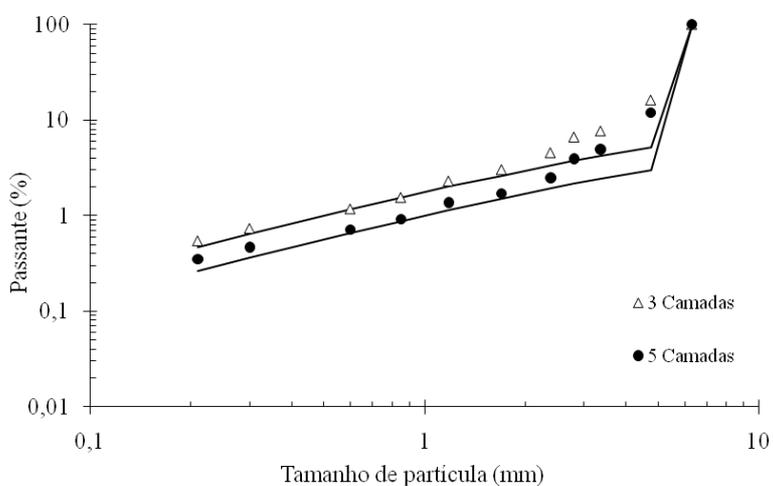


Figura IV-41. Quebra de leitos com varias camadas de calcário Cantagalo de 6,30 x 4,75 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 88 mm.

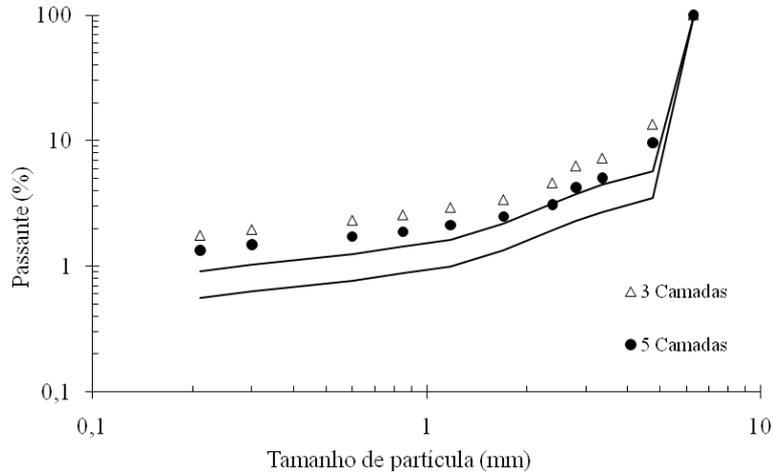


Figura IV-42. Quebra de leitos com varias camadas de minério de ferro de Timbopeba de 6,30 x 4,75 mm com energia de impacto igual a 3,05 J e bola de 88 mm.

As Figuras IV-43 a IV-45 mostram que o modelo descreve razoavelmente bem a quebra de leitos monodispersos com tamanhos de 6,30 x 4,75 mm para diferentes energias de impacto e diferente material. As Figuras IV-46 a IV-48 mostram que o ajuste do modelo continua sendo razoável para tamanhos de partícula de 1,7 x 1,4 mm. Na faixa de tamanhos finos de partícula de 0,425 x 0,300 mm o modelo consegue descrever a quebra de leitos, mesmo com as dificuldades na determinação da função quebra e a energia de fratura para essa faixa fina de tamanhos de partícula.

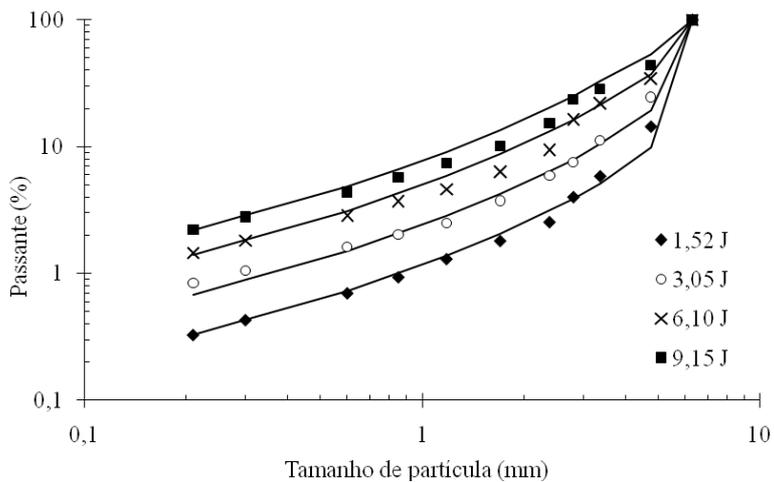


Figura IV-43. Quebra de monocamadas com partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

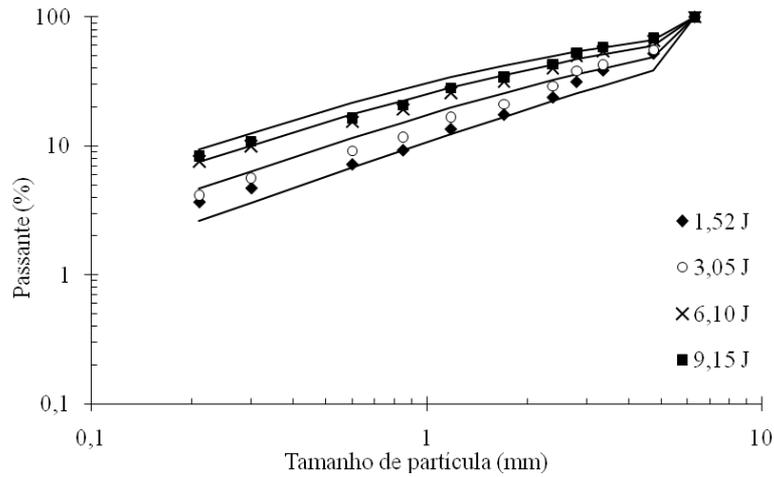


Figura IV-44. Quebra de monocamadas com partículas de 6,30 x 4,75 mm de calcário Cantagalo para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

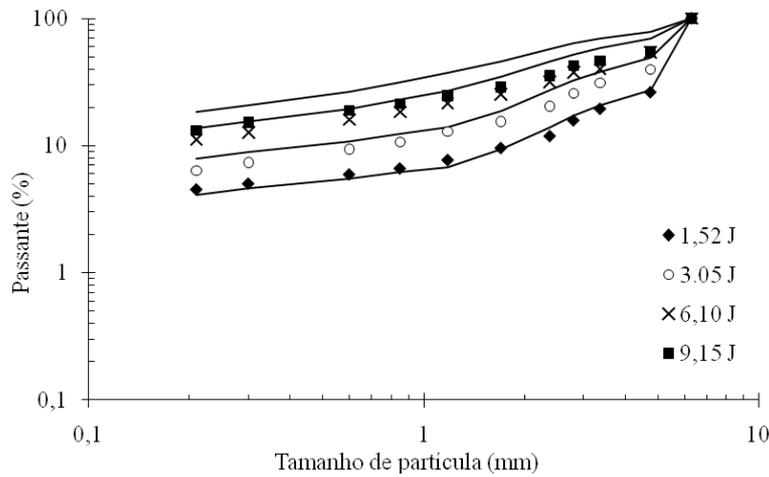


Figura IV-45. Quebra de monocamadas com partículas de 6,30 x 4,75 mm de minério de ferro de Timbopeba para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

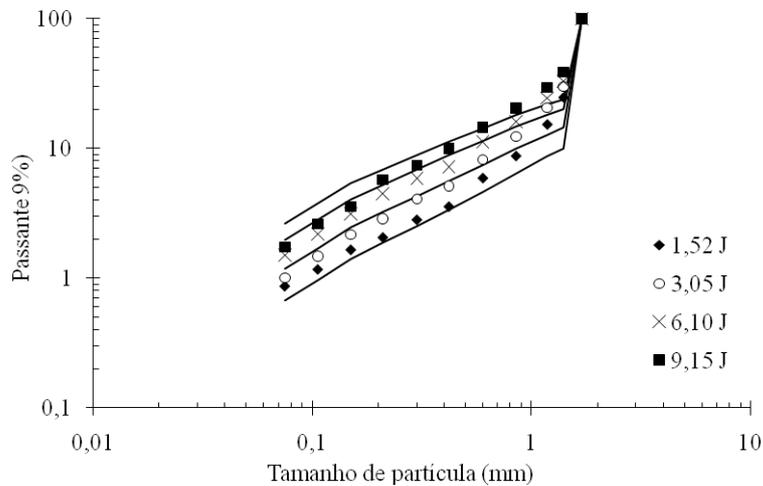


Figura IV-46. Quebra de monocamadas com partículas de 1,7 x 1,4 mm de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

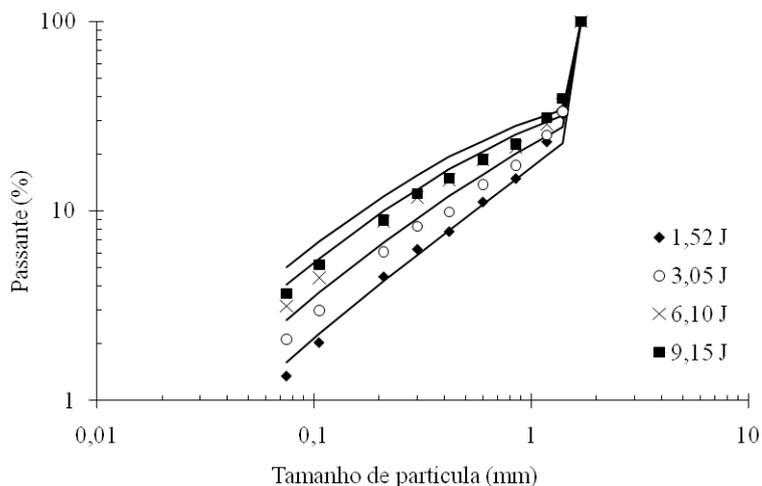


Figura IV-47. Quebra de monocamadas com partículas de 1,7 x 1,4 mm de calcário Cantagalo para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

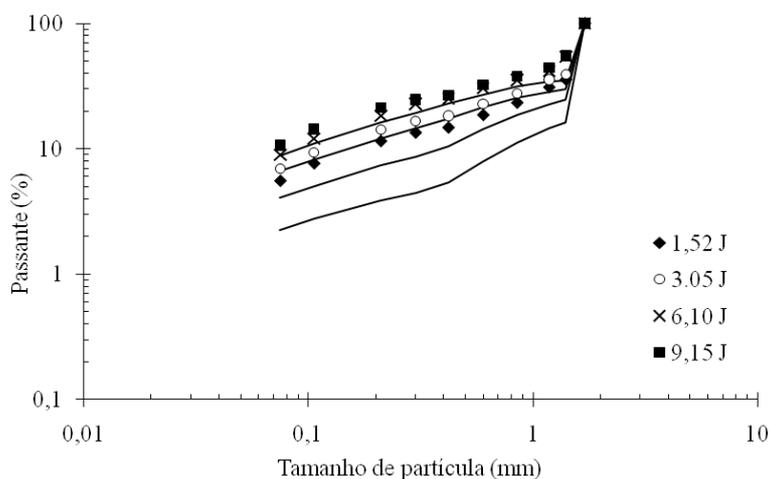


Figura IV-48. Quebra de monocamadas com partículas de 1,7 x 1,4 mm de minério de ferro de Timbopeba para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

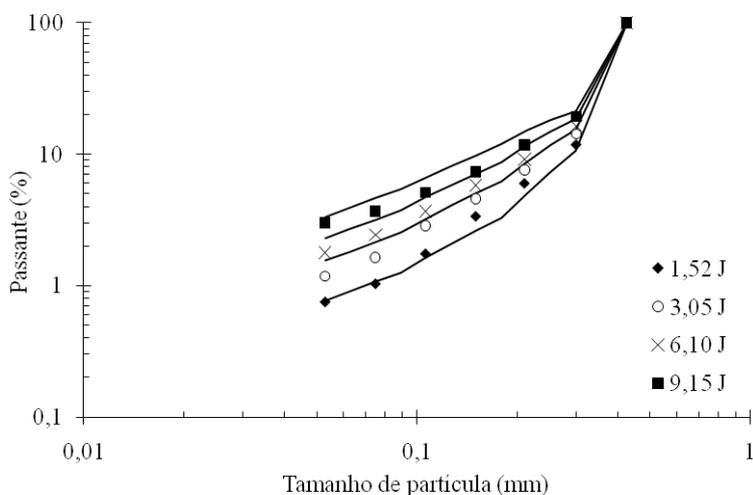


Figura IV-49. Quebra de monocamadas com partículas de 0,425 x 0,300 mm de minério de cobre de Sossego para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

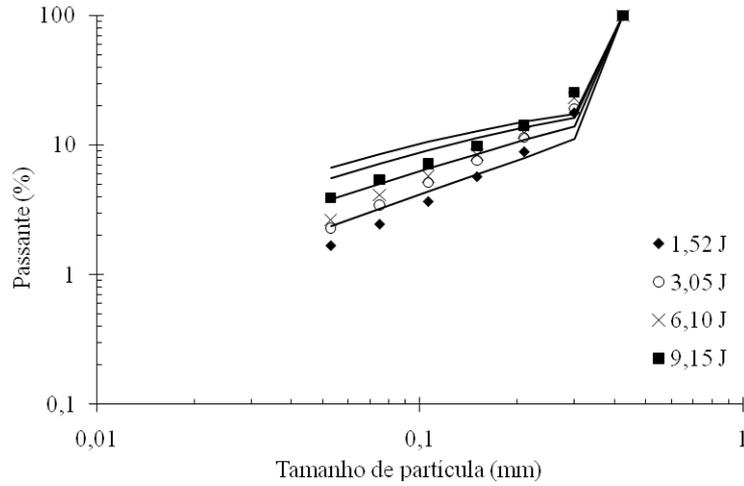


Figura IV-50. Quebra de monocamadas com partículas de 0,425 x 0,300 mm de calcário Cantagalo para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

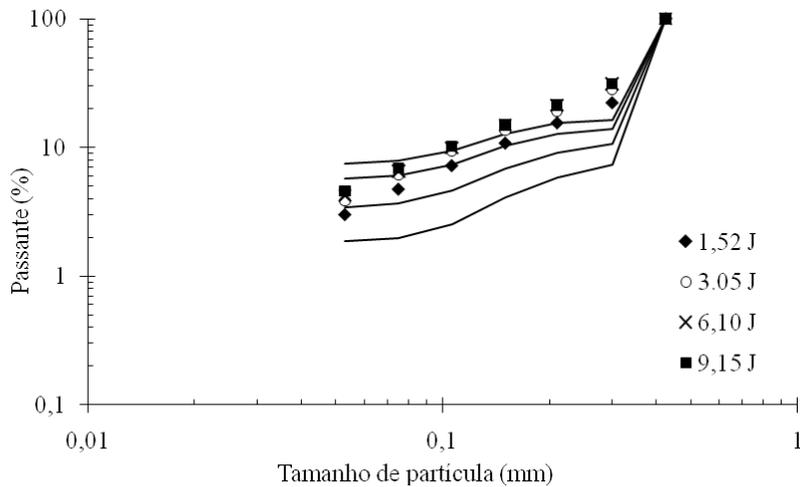


Figura IV-51. Quebra de monocamadas com partículas de 0,425 x 0,300 mm de minério de ferro de Timbopeba para diferentes energias de impacto (diâmetro da bola de 88 mm).

Por ultimo as Figuras IV-52 e IV-54 mostram que o modelo é sensível à variação do diâmetro do corpo moedor. Para os materiais testados, se observa que nas faixas finas de tamanhos de partícula (0,425 x 0,300 mm), existe uma inversão na função quebra. O modelo consegue descrever a inversão devido a que considera que o número de partículas capturadas é função direta do diâmetro da bola, para posteriormente repartir a energia de impacto da bola de forma radial, entre as partículas capturadas.

Tabela IV-4. Resultados das simulações de impacto em leitos para diferentes energias de impacto, tamanhos de partícula e materiais.

Material	Diâmetro do corpo moedor d_B (mm)	Tamanho de partícula d_i (mm)	Energia de impacto E (J)	Configuração	Número de partículas do leito	Número de partículas capturadas $N_{pcap i}$	Fração de energia de impacto efetiva f_e
Minério de cobre de Sossego	88	1,7 x 1,4	1,52	Monocamada	357	120	1,00
	88	1,7 x 1,4	9,15	Monocamada	357	182	1,00
	88	0,425 x 0,300	1,52	Monocamada	6961	1719	1,00
	88	0,425 x 0,300	9,15	Monocamada	6961	1719	1,00
Calcário Cantagalo	88	1,7 x 1,4	1,52	Monocamada	357	141	1,00
	88	1,7 x 1,4	9,15	Monocamada	357	141	1,00
	88	0,425 x 0,300	1,52	Monocamada	6961	1719	1,00
	88	0,425 x 0,300	9,15	Monocamada	6961	1719	1,00
Minério de ferro de Timbopeba	88	1,7 x 1,4	1,52	Monocamada	357	202	1,00
	88	1,7 x 1,4	9,15	Monocamada	357	217	1,00
	88	0,425 x 0,300	1,52	Monocamada	6961	3186	1,00
	88	0,425 x 0,300	9,15	Monocamada	6961	3417	1,00

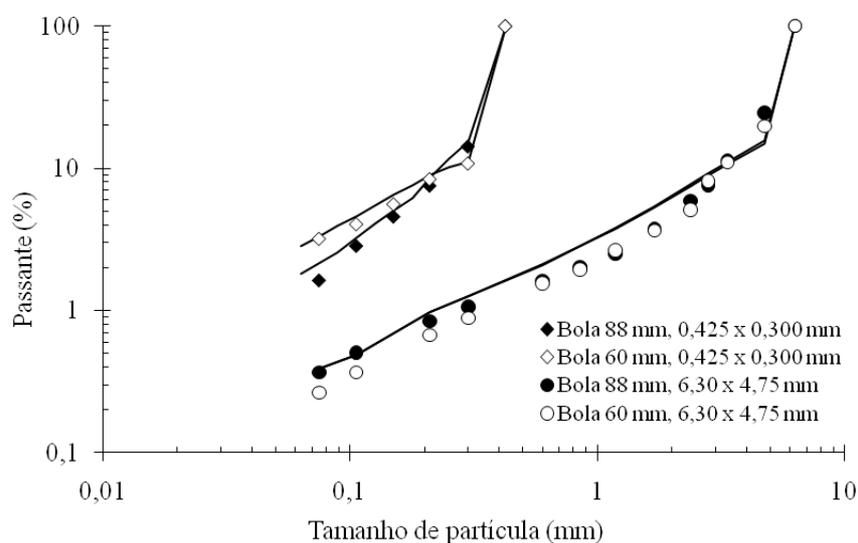


Figura IV-52. Quebra de monocamadas de minério de cobre de Sossego com energia de impacto de 3,05 J para diferentes diâmetros de corpo moedor e tamanhos de partículas.

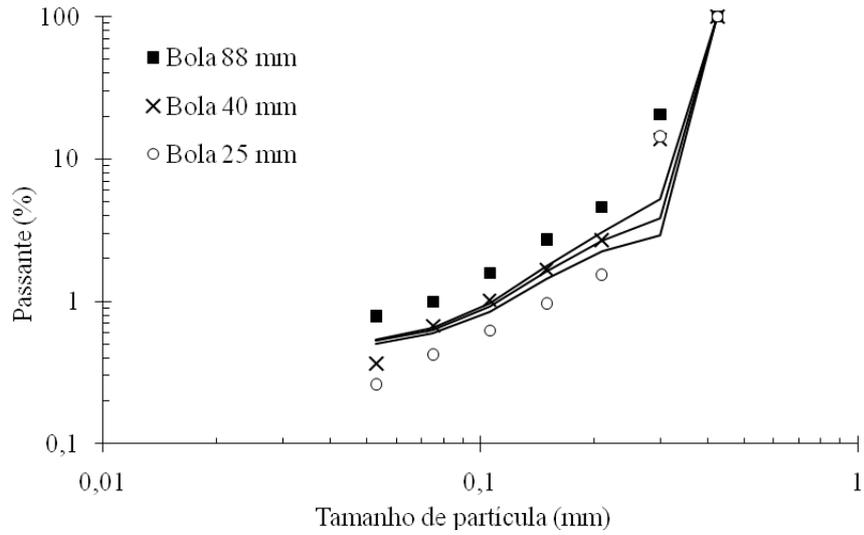


Figura IV-53. Quebra de monocamadas com tamanho de partícula de 0,425 x 0,300 mm de minério de cobre de Sossego com energia de impacto de 1,0 J para diferentes diâmetros de corpo moedor.

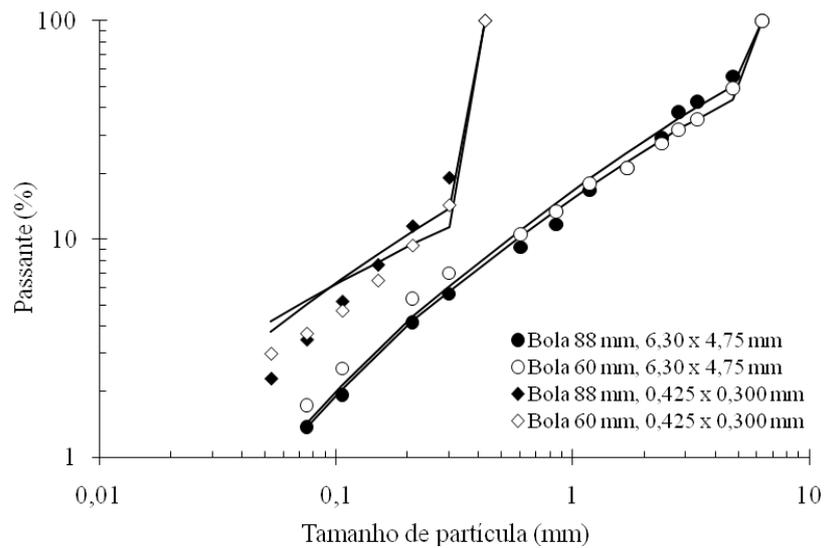


Figura IV-54. Quebra de monocamadas de calcário Cantagalo com energia de impacto de 3,05 J para diferentes diâmetros de corpo moedor e tamanhos de partículas.

V. CONCLUSÕES

Os dados de caracterização dos diferentes materiais utilizados no presente trabalho, obtidos nos ensaios de fragmentação de partículas individuais (DWT), determinação da energia de fratura (E_{50} CCI) e quebra de leitos com barra (E_{50} Leito) para as partículas nas faixas de tamanho entre 11,2 x 9,5 mm e 0,212 x 0,150 mm, provêm os parâmetros das equações do MGC necessários para a simulação e caracterização da quebra de leitos que contem desde uma partícula até leitos de 5 camadas de partículas.

Nos ensaios experimentais de impressão de leitos e as simulações utilizando o software EDEM[®], se observou que para corpos moedores de aço esféricos com diâmetros entre 40 mm e 88 mm, impactando em leitos com partículas com tamanhos entre 0,425 x 0,300 mm e 6,30 x 4,75 mm, o raio de captura varia entre 7 e 18 mm.

Com ajuda das simulações utilizando o software EDEM[®] e os ensaios experimentais de quebra de leitos com um impactor esférico, foi possível entender e modelar matematicamente o que ocorre no interior dos leitos de partículas quando são tencionadas aplicando energias de impacto entre 1,52 J e 3,05 J e impactando leitos não confinados.

Os resultados das simulações de quebra de leitos monodispersos mostram que o modelo matemático proposto é sensível à variação de parâmetros como: o número de anéis do leito, a energia de impacto e o diâmetro do corpo moedor, o grau de compactação do leito e a faixa de tamanhos de partículas do leito. Adicionalmente, o

modelo é capaz de prever a quebra de leitos de varias camadas, embora seja baseado na captura de partículas contidas em uma monocamada.

Com base nos modelos anteriores de quebra de leitos por impacto, o modelo mecanicista de moinhos de bolas em desenvolvimento no LTM acrescenta um maior grau de detalhe na modelagem matemática considerando dois conceitos importantes que são o volume de partículas capturadas no leito e a repartição da energia no interior do leito.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUSTIN, L.G., KLIMPEL, R.R., LUCKIE, P.T., 1984, “Process Engineering of size Reduction: Ball Milling”, *AIME, SME*, New York, USA.
- AUSTIN, L.G., CONCHA, F., 1993, *Diseño y simulación de circuitos de molienda y clasificación*, CYTED, Curso, 392 p.
- AUSTIN, L.G., KESLEY, J., SAMPAIO DE SOUZA, A., SCHNEIDER, C.L., 2007, “Simulation of wet ball milling of iron ore at Carajás, Brazil”, *International Journal of Mineral Processing*, v.84, pp. 157-171.
- BOND, F. C., 1952, “The Third theory of comminution”, *Transactions SME/AIME* 193, pp. 484–494.
- BOURGEOIS, F.S., 1993, *Single particle fracture as basis for microscale modeling of comminution processes*. Ph.D. thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utha, USA.
- CARVALHO, E., 2003, *Modelagem do britador cônico a partir de estudos de quebra de partículas individuais e em leitos*. Tese de Doutorado, Engenharia Metalúrgica e Materiais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, Brazil.
- CHO, K., 1987, *Breakage Mechanism in Size Reduction*. Ph.D. thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utha, USA.
- CLEARY, P. W., SINNOTT, M. D., MORRISON, R. D., 2008. “DEM prediction of particle flows in grinding processes”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 58, pp. 319-353. INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS
- COUROYER, Z.C., GHADIRI, M., 2000. “Distinct element analysis of bulk crushing: effect of particle properties and loading rate”, *Powder Technology*, v. 109, pp. 241-254.

- DATTA, A., 1999, *A Model of Batch Grinding with Impact Energy Data*. Ph.D. thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA.
- FUERSTENAU, D.W., ABOUZEID, A.-Z.M., 2002. “The energy efficiency of ball milling in comminution”. *International Journal of Mineral Processing*, v. 67, pp. 161-185.
- HERBST, J.A., FUERTENAU, D.W., 1973, “Mathematical Simulation of Ball Milling Using Specific Power Information”, *AIME transactions*, 254, 3173.
- HERBST, J.A., FUERTENAU, D.W., 1980, “Scale-up procedure for continuous grinding mill design using population balance models”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 7, n. 1, p. 1-31.
- HÖFLER, A., HERBST, J. A., 1990, “Ball mill through microscale fragmentation studies: fully monitored particle bed comminution versus single particle impact tests”. In: *7th European Symposium on Comminution*, Yugoslavia, v. 1.
- KING, R.P., 2001, *Modeling and simulation on mineral processing systems*, Boston, Butterworth-Heinemann.
- KOU, S.Q., LIU, H.Y., LINDQVIST, P.A., TANG, C.A., XU, X.H., 2001, “Numerical investigation of particle breakage as applied to mechanical crushing – Part II: Interparticle breakage”, *Internacional Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 38, pp. 1163-1172.
- LIU, J., SCHÖNERT, K., 1996, “Modelling of interparticle breakage”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 44-45, pp. 101-115.
- NAPIER-MUNN, T.J., MORREL, S., MORRISON, R.D., KOJOVIC, T. 1996, “Mineral Comminution circuits: Their operation and optimisation”, *JKMRC Monograph Series*, pp. 413 University of Queensland, Brisbane, Australia.
- NARAYANAN, S.S., 1986, “Single particle breakage tests: a review of principles and applications to comminution modeling”, *Bull. Proc. Australas. Inst. Min. Metall.*, v. 291, n.4, Australia.

- NGUYEN, A.-QU., HUSEMANN, K., OETTEL, W., 2002, “Comminution behaviour of an unconfined particle bed”. *Minerals Engineering*, v. 15, pp. 65-74.
- OETTEL, W., NGUYEN, A.-QU., HUSEMANN, K., BERNHARDT, C., 2001, “Comminution in confined particle beds by single compressive load”. *International Journal of Mineral Processing*, v. 63, pp. 1-16.
- POTAPOV, A.V., CAMPBELL, C.S. HOPKINS, M.A., 1994, “Computer simulation of impact-induced particles breakage”, *Powder Technology*, v. 81, pp. 207-216.
- POTAPOV, A.V., CAMPBELL, C.S. HOPKINS, M.A., 2000, “The breakage induced by a single grinding ball dropped onto a randomly packed particle bed”, *Powder Technology*, v. 107, pp. 108-117.
- RAJAMANI, R.K., MISHRA, B.K., VENUGOPAL, R., DATTA, A., 2000, “Discrete element analysis of tumbling mills”, *Powder Technology*, v. 109, n. 1-3, pp. 105-112.
- SCHÖNERT, K., 1988^a, *Fundamentals of particle breakage*. In: Course notes, University of the Witwatersrand, Division of Continuing Engineering Education, Johannesburg, Section F2.
- SCHÖNERT, K., 1988^b, *Stressing mechanisms in mills*. In: Course notes, University of the Witwatersrand, Division of Continuing Engineering Education, Johannesburg, Section F3.
- SCHÖNERT, K., 1988^c, “A first survey of grinding with high-compression roller mills”. *International Journal of Mineral Processing*, v. 22, pp. 401-412.
- SCHÖNERT, K., 1996, “The influence of particle bed configurations and confinements on particle breakage”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 44-45, pp. 1-16.
- SHI, F., KOJOVI, T., LARBI-BRAM S., MANLAPIG, E., 2008, “Development of a rapid particle breakage characterization device”. In: *Comminution 2008*.
- SILVA, A.T., 2007, *Otimização da moagem de escória granulada de alto-forno por meio da simulação computacional usando o modelo do balanço populacional*.

Dissertação de Mestrado, Engenharia Metalúrgica e Materiais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, Brazil.

TANG, C.A., XU, X.H., KOU, S.Q., LINDQVIST, P.A., LIU H.Y., 2001, “Numerical investigation of particle breakage as applied to mechanical crushing – Part I: Single-particle breakage”. *Internacional Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, v. 38, pp. 1147-1162.

TAPIA, J.Q., 2005, *Preparación Mecánica de Minerales*, Universidad Arturo Prat, Ingeniería em Metalurgia Extractiva, Iquique, Chile, Cap. 5.

TAVARES, L. M., 1997, *Microscale Investigation of Particle Breakage Applied to the Study of Thermal and Mechanical Predamage*, Ph. D. Thesis, University of Utah.

TAVARES, L.M., 1998, “Energy absorbed in breakage of single particles in drop weight testing”. *Minerals Engineering*, v. 12, pp.43-50.

TAVARES, L.M., 2005, *Operações Unitárias em Processamento Mineral*, Apostila do curso de Processamento de Recursos Minerais I do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

TAVARES, L.M., 2007, “Breakage of particle: Quase-Static”. In: SALMAN, A.D., GHADIRI, M. and HOUNSLOW, M.J. (eds.), *Handbook of Powder Technology: Particle Breakage*. 1 ed. Amsterdam: Elsevier B.V., v. 12, pp. 3-68.

TAVARES, L.M., CARVALHO, R.M., 2009, “Modeling nonlinear breakage rates of coarse particles in ball mills”. *Minerals Engineering*, v. 22, pp. 650-659.

TAVARES, L.M., KING, R.P., 1998, “Single particle fracture under impact loading”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 54, p. 1-28.

TAVARES, L.M., KING, R.P., 2002. “Modeling of particle fracture by repeated impacts using continuum damage mechanics. *Powder Technology*. v.123. n.2-3, pp. 138-146.

WILLS, B.A., 1997, *Mineral Processing Technology*, Butterworth-Heinemann, Oxford.