



MODELAGEM DA MOAGEM CONTÍNUA A SECO BASEADA NA MOAGEM EM BATELADA

Alessandro Luiz Rocha de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Rio de Janeiro
Dezembro de 2012

MODELAGEM DA MOAGEM CONTÍNUA A SECO BASEADA NA
MOAGEM EM BATELADA

Alessandro Luiz Rocha de Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS.

Examinada por:

Prof. Luís Marcelo Marques Tavares, Ph.D.

Prof. José da Rocha Miranda Pontes, D.Sc.

Prof. Roberto Galery, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2012

Oliveira, Alessandro Luiz Rocha de

Modelagem da Moagem Contínua a Seco Baseada na Moagem em Batelada/ Alessandro Luiz Rocha de Oliveira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XVI, 114 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, 2012.

Referencias Bibliográficas: p. 96-103.

1. Modelagem matemática. 2. Moagem. 3. Simulação.
I. Tavares, Luís Marcelo Marques. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. III. Título.

À memória de Alexandre Guedes de Oliveira,
pelo amor incondicional a toda sua família, em especial, a seus netos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que tem me dado e por esta maravilhosa experiência que é a vida.

Ao meu orientador, Professor Luís Marcelo Marques Tavares, por toda atenção e paciência disponibilizados. Sua dedicação à pesquisa foi determinante para minha escolha na área mineral. Agradeço pela confiança depositada e pelos incentivos dados durante esses quatro anos de trabalho no LTM.

Ao Laboratório de Estruturas do PEC / COPPE pelas análises granulométricas por espalhamento a laser.

A minha grande amiga e dedicada engenheira Yemcy por ter me auxiliado nas análises granulométricas e por ter me apoiado em todos os momentos dessa jornada.

Ao amigo e grande engenheiro Guilherme Kallembach por ter criado o sistema supervisor do circuito de moagem, e ao amigo e excelente técnico Gláucio Aquino por estar ao meu lado nas execuções dos experimentos.

Aos grandes amigos Ricardo Nery e Luciane pelo incentivo de continuar a lutar.

Aos colegas do LTM: Rangler, Mariana, Evandro, Marcus “Winitz”, Gabriel, Rodrigo e Emerson por terem me proporcionado boas conversas em relação ao meu trabalho e à minha vida.

Aos meus pais, Luiz Fernando e Maria Madalena, que com muito esforço e dedicação sempre estiveram dispostos a me proporcionar as melhores oportunidades. Aos meus familiares, com um carinho todo especial ao meu irmão Anderson Oliveira, ao meu avô Alexandre Guedes (in memoriam) e às minhas avós Maria Amélia e Maria Julia, que sempre estiveram presentes durante esta jornada, me ajudando com atitudes e com pensamentos positivos. Amo vocês.

Aos meus novos amigos de marinha Caio Ribeiro, Renan Raul e Mariana Villas-Bôas, por terem me apoiado nos estudos do curso ASON.

Agradeço ao CNPq e à COPPETEC pelo apoio financeiro durante a pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM DA MOAGEM CONTÍNUA A SECO BASEADA NA
MOAGEM EM BATELADA

Alessandro Luiz Rocha de Oliveira

Dezembro/2012

Orientadores: Luís Marcelo Marques Tavares

Programa: Engenharia Metalúrgica e de Materiais

Ensaio de moagem em batelada em moinhos de bolas de laboratório têm sido amplamente utilizados e, em grande parte, com sucesso, tanto no projeto quanto na otimização de moinhos contínuos, usando alguns procedimentos de escalonamento. Alguns pesquisadores, no entanto, afirmam que a distribuição granulométrica do minério dentro do moinho contínuo não é a mesma que aquela testada nos moinhos de laboratório em batelada, contestando a base de tais abordagens. O presente trabalho compara as simulações da moagem de um moinho piloto contínuo, usando o modelo do balanço populacional e o método de escalonamento proposto por Austin e colaboradores para dados de moagem de um minério de ferro itabirítico e de um resíduo de catalisador, usado no craqueamento de petróleo. Os resultados mostram que os desvios encontrados entre os valores medidos e calculados para o tamanho 80% passante para o moinho operando sob uma variedade de condições de moagem foram, em média, 6,7 μm com um máximo de 7,5 μm , demonstrando a eficácia do método.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MODELING CONTINUOUS DRY GRINDING ON THE BASIS OF BATCH
GRINDING

Alessandro Luiz Rocha de Oliveira

December/2012

Advisor: Luís Marcelo Marques Tavares

Department: Metallurgical and Materials Engineering

Batch grinding tests in lab ball mills have been widely and, to a great extent, successfully used in the design and optimization of large-scale continuous mills using a couple of popular scale-up procedures. Some researchers, however, argue that the size distribution of the ore inside a continuous mill is not the same as the one that is tested in batch mode in the laboratory, questioning the basis of such approaches. The present work compares predictions of a continuous pilot-scale mill using the population balance model and the scale-up procedure proposed by Austin and co-workers to data from grinding of an Itabirite iron ore and a spent catalyst used in the oil industry. It shows that the deviations encountered between measured and calculated 80% passing sizes for the mill operating under a variety of grinding conditions were, on the average, 6.7 μm , with a maximum of 7.5 μm , demonstrating the validity of the method.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	X
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
I. INTRODUÇÃO	1
II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
II.1 Cominuição	3
II.2 Condições Operacionais do Moinho de Bolas	7
II.3 Modelos Aplicados na Cominuição	10
II.3.1 Modelos Clássicos ou Empíricos	10
II.3.2 Modelo Fenomenológico.....	15
II.3.3 Modelo Mecanicista	21
II.4 Investigação da Quebra em Moinhos	23
II.4.1 Função Seleção.....	27
II.4.2 Função Quebra	33
II.5 Desenvolvimento Matemático do Modelo do Moinho	38
II.5.1 Formulação Geral do Modelo.....	38
II.5.1.1 Relações de Transferência de Massa	40
II.5.1.2 Distribuição do Tempo de Residência (DTR)	47
II.5.1.3 Função Classificação Interna.....	50
II.5.2 Modelo do Moinho de Bolas em Batelada	53
II.5.3 Modelo do Moinho de Bolas Contínuo	53
III. METODOLOGIA	55
III.1 Materiais	55
III.2 Equipamento de Estudo	57
III.3 Procedimento Experimental	60
III.3.1 Ensaio de DTR.....	60
III.3.2 Moagem Descontínua	61
III.3.3 Moagem Contínua.....	62
IV. RESULTADOS	65
IV.1 Modelagem da DTR	65
IV.2 Modelagem da Moagem Descontínua	70
IV.3 Modelagem da Moagem Contínua	73
IV.3.1 Resultados Experimentais.....	73
IV.3.2 Simulação	80
V. CONCLUSÕES	94

VI. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	96
VII. ANEXOS.....	104
VII.1.1 Dados das condições operacionais ensaiadas	104

LISTA DE FIGURAS

Figura II-1 – Moinho tubular rotativo	5
Figura II-2 – Exemplificação de uma distribuição granulométrica.....	7
Figura II-3 – Estados de movimento de corpos moedores: a) cascata; b) catarata; c) centrífugo (Tavares, 2005).	8
Figura II-4 – Esquema representativo do modelo do balanço populacional (adaptado de Rajamani, 1992).....	18
Figura II-5 – Apresentação do contato mola/amortecedor (adaptado de Mishra e Rajamani, 1994).....	22
Figura II-6 – Representação da fragmentação de uma partícula.	25
Figura II-7 – Efeito do tempo de moagem na fração restante do monotamanho original de um ensaio de moagem em batelada com uma amostra de clínquer. Pontos representam dados experimentais e as linhas representam suas linhas de tendência (Silva, 2007).	28
Figura II-8 - Representação da taxa específica de quebra encontrada para uma amostra de clínquer a partir da relação funcional proposta por Austin (Silva, 2007).	29
Figura II-9 - Distribuição de tamanhos de um material monotamanho antes e depois da fratura primária (Barrios, 2010).	35
Figura II-10 – Modelo da função quebra para a distribuição acumulada da fratura primária das partículas na faixa de 2,8 x 2,0 mm de uma amostra de minério de cobre.	36
Figura II-11 – Moinho contínuo como um único reator de mistura perfeita.....	40
Figura II-12 – Representação da área transversal do moinho.	46
Figura II-13 – Diafragma de dupla parede (Özer <i>et al.</i> , 2006 – cópia autorizada para publicação).....	51
Figura III-1 – Distribuições granulométricas dos materiais ensaiados.	56
Figura III-2 – Teste de medida de ângulo de repouso: Ecat (à esquerda) e minério de ferro (à direita).....	57
Figura III-3 – Representação esquemática do arranjo adotado	58
Figura III-4 – Tela do sistema supervisório	58
Figura III-5 – Desenho em CAD do moinho de bolas contínuo.....	59
Figura III-6 – Vista interna e perfil da câmara de moagem.	59
Figura III-7 – Detalhe da rosca de alimentação (direita) e descarga (esquerda) do moinho.	60

Figura III-8 – Vista do diafragma antes (à esquerda) e depois (à direita) do ensaio de moagem descontínua.	61
Figura III-9 – Identificação do regime estacionário durante um experimento com E-cat, empregando 30% de enchimento e 30% da velocidade crítica.	64
Figura IV-1 – Variação do <i>hold-up</i> do moinho no ensaio e da taxa de descarga do produto.	65
Figura IV-2 – Teor e massa acumulada de Zn contidos na descarga do moinho em função do tempo.	66
Figura IV-3 – Comparação entre os dados experimentais e as curvas simuladas com os parâmetros ótimos: a) 1 e 2 misturadores; b) 3 misturadores e reator de dispersão axial.	70
Figura IV-4 – Comparação entre as distribuições granulométricas medidas e calculas a partir da moagem em batelada do minério de ferro ($J = 0,30$, $U = 1,04$ e $\varphi_c = 0,75$): símbolos são dados experimentais e linhas representam o modelo ajustado.	71
Figura IV-5 – Comparação entre as distribuições granulométricas medidas e calculas a partir da moagem em batelada do Ecat ($J = 0,30$, $U = 0,45$ e $\varphi_c = 0,76$): símbolos são dados experimentais e linhas representam o modelo ajustado.	72
Figura IV-6 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat ($J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$), obtidos do sistema supervísório.	74
Figura IIV-7 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito ($J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$), obtidos do sistema supervísório.	75
Figura IV-8 – Resultados de <i>hold-up</i> medidos em regime estacionário em função da vazão de material. Marcadores cheios e vazios representam resultados de ensaios com Ecat e Itabirito, respectivamente.	77
Figura IV-9 – Análise granulométrica do Ecat e Itabirito para as condições: $J = 0,30$, $\varphi_c = 0,75$ e vazão de 81 e 88 cm ³ /min, respectivamente.	78
Figura IV-10 – Representação do moinho contínuo descrito como reatores de mistura perfeita em série: a) dois reatores; b) três reatores.	81
Figura IV-11 – Comparação das distribuições granulométricas medidas e simuladas considerando três misturadores perfeitos em série, relativas à moagem contínua do minério de ferro: símbolos representam dados experimentais e linhas os dados simulados.	83
Figura IV-12 – Comparação das distribuições granulométricas medidas e calculadas considerando três misturadores perfeitos em série, relativas à moagem contínua do Ecat: símbolos representam dados experimentais e linhas os dados simulados.	83
Figura IV-13 – Comparação dos parâmetros d_{80} , d_{50} e d_{10} simulados para dois e três misturadores perfeitos e para os dois materiais estudados, nas diferentes condições investigadas.	84
Figura IV-14 – Comparação entre os valores d_{80} medidos e calculados para os ensaios com os dois tipos de materiais, considerando U calculado a partir do <i>hold-up</i> medido.	

Marcadores cheios representam o Itabirito e os vazios o Ecat; linhas tracejadas representam a banda de erro de 6,7 μm	87
Figura IV-15 – Comparação entre os valores d_{80} medidos e calculados para os ensaios com os dois tipos de materiais, assumindo $U = 1$. Marcadores cheios representam o Itabirito e os vazios o Ecat; linhas tracejadas representam os desvios das previsões.	89
Figura IV-16 – Valores do Preenchimento de vazios (U) medidos nos de moagem contínua para minério de ferro e Ecat, em função da taxa de alimentação	90
Figura IV-17 – Comparação entre os valores medidos e calculados dos <i>hold-up</i> do equipamento. As linhas tracejadas representam os desvios das previsões.	93
Figura IV-18 – Avaliação do ajuste realizado para k_1 . Os símbolos representam os valores experimentais ($H_{\text{exp}} - H_0$) e as linhas os valores calculados ($H_{\text{calc}} - H_0$).	93
Figura VII-1 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 6 \text{ kg/h}$ (40 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$	104
Figura VII-2 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$	105
Figura VII-3 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 16,2 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$	105
Figura VII-4 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 6 \text{ kg/h}$ (40 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$	106
Figura VII-5 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$	106
Figura VII-6 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 16,2 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$	107
Figura VII-7 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 6 \text{ kg/h}$ (40 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$	107
Figura VII-8 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$	108
Figura VII-9 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 16,2 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$	108
Figura VII-10 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$	109
Figura VII-11 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{\text{in}} = 18 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$	109
Figura VII-12 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{\text{in}} = 18 \text{ kg/h}$ (82 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$	110
Figura VII-13 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{\text{in}} = 24,6 \text{ kg/h}$ (113 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$	110

Figura VII-14 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 9$ kg/h (41 cm ³ /min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$	111
Figura VII-15 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18$ kg/h (82 cm ³ /min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$	111
Figura VII-16 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 24,6$ kg/h (113 cm ³ /min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$	112
Figura VII-17 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 9$ kg/h (41 cm ³ /min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$	112
Figura VII-18 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18$ kg/h (82 cm ³ /min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$	113
Figura VII-19 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 24,6$ kg/h (113 cm ³ /min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$	113
Figura VII-20 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 9$ kg/h (41 cm ³ /min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$	114
Figura VII-21 – Dados de <i>hold-up</i> , taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18$ kg/h (82 cm ³ /min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$	114

LISTA DE TABELAS

Tabela III-1 - Composição Química Básica (% em peso) do Ecat (Faria, 2012)	55
Tabela III-2 - Condições operacionais ensaiadas em moagem descontínua	62
Tabela III-3 - Condições operacionais do moinho para os experimentos realizados	63
Tabela IV-1 - Parâmetros ótimos dos modelos de mistura perfeita e de dispersão axial	69
Tabela IV-2 - Síntese das características de quebra dos materiais estudados	72
Tabela IV-3 - Condições operacionais medidas em regime estacionário para o Ecat.....	76
Tabela IV-4 - Condições operacionais medidas em regime estacionário para o Itabirito	76
Tabela IV-5 - Parâmetros granulométricos do produto gerado na moagem do Ecat	79
Tabela IV-6 - Parâmetros granulométricos do produto gerado na moagem do Itabirito.....	79
Tabela IV-7 - Parâmetros granulométricos do produto simulado para o Ecat, considerando o <i>hold-up</i> medido	85
Tabela IIV-8- Parâmetros granulométricos do produto simulado para o Itabirito, considerando o <i>hold-up</i> medido	86
Tabela IV-9 – Valores de <i>hold-up</i> calculados considerando $U = 1$	88
Tabela IV-10 – Valores encontrados para k_1 a partir de regressões lineares.....	91
Tabela IV-11– Valores de <i>hold-up</i> morto (H_0) calculados.....	92

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a	Parâmetro do modelo de transporte proposto por Austin
A	Área da seção transversal do moinho
A_h	Área da seção transversal do <i>hold-up</i>
A_{80}	Tamanho representativo de 80% das partículas da alimentação
b_{ij}	Função quebra na forma discreta e distribuída
$b(x, x')$	Função quebra na forma contínua e distribuída
B_{ij}	Função quebra na forma discreta e acumulada
c	Parâmetro do fator de escalonamento C_4
C_i	Fator de escalonamento da função seleção ($1 \leq i \leq 5$)
$C(t)$	Concentração do traçador no fluxo de descarga ao longo do tempo
C_{in}	Concentração de traçador discretizada na alimentação do moinho
C_{out}	Concentração de traçador discretizada na descarga do moinho
d_{cm}	Diâmetro máximo dos corpos moedores
D_i	Vetor de classe de tamanhos das partículas geradas na quebra
D_j	Vetor de classe de tamanhos das partículas que sofrem a quebra
D^*	Tamanho de partícula de origem que modifica a função quebra
D_m	Diâmetro interno do moinho
D_x	Coefficiente de Dispersão ou de mistura axial
dp_i	Tamanho representativo de partículas na classe i
e	Parâmetro do modelo de transporte proposto por Austin
e_b	Altura da carga em repouso
E^*	Energia cominutiva absorvida por unidade de massa
E_c	Fração da alimentação reportada ao material fino proposta por Whiten
$E(t)$	Distribuição dos tempos de residência na forma distribuída
$F(t)$	Distribuição dos tempos de residência na forma acumulada
f_{op}	Fração da área aberta para descarga do material
fp	Fração de vazios criados pelos corpos moedores
H	Massa retida no moinho (<i>hold-up</i>)
H^*	Massa de referência na equação de transporte proposto por Austin
H_0	<i>Hold-up</i> para a taxa de alimentação igual a zero
i	Índice de classes de tamanhos
j	Índice de classes de tamanhos
J	Grau de enchimento do moinho
L	Comprimento do moinho
k_1	Constante da equação de transporte de massa proposto por Nomura
M	Massa de traçador contida no produto da moagem
Mc	Material realmente classificado da curva de partição de Whiten
n	Número de classes de tamanhos de partículas
N	Velocidade de rotação do moinho
N_c	Velocidade de rotação crítica do moinho
p_1	Fração de partículas pertencentes à classe de tamanho 1
p_i	Distribuição granulométrica do material, indicando a proporção contida na classe de tamanhos i
p_{in}	Distribuição granulométrica da alimentação
p_{out}	Distribuição granulométrica do produto
P_{80}	Tamanho representativo de 80% das partículas do produto
Pe	Número de Peclet
Pot	Potência do moinho em operação

Q_{in}	Vazão volumétrica de entrada no volume de controle
Q_{out}	Vazão volumétrica de saída no volume de controle
$s(x,t)$	Função seleção ou taxa específica de quebra na forma contínua
s_i	Taxa específica de quebra, na forma discretizada com relação à classe de tamanho
S_1	Taxa de quebra para classe de tamanho 1
S_i^E	Taxa de quebra relacionada a potencia específica para as classes i
t	Tempo
u	Velocidade média do material no interior do moinho
U	Preenchimento de vazios
V	Volume de controle
V_{cm}	Volume dos corpos moedores
V_m	Volume interno do moinho
V_{mat}	Volume de material particulado no interior do moinho
v	Velocidade de descarga do material pelas aberturas do diafragma
W_i	Índice de trabalho na moagem
W_{in}	Vazão mássica de alimentação
W_{out}	Vazão mássica de descarga
W	Vazão mássica de material no regime estacionário
x	Tamanho de partícula
x'	Tamanho de partícula
x_i	Tamanho de partícula normalizado da curva de partição de Whiten

Símbolos Gregos

$\bar{\psi}$	Distribuição numérica das partículas em número
Ψ_{in}	Distribuição numérica de partículas em número que entram no volume de controle
Ψ_{out}	Distribuição numérica de partículas em número que saem do volume de controle
ζ_j	Quantidade da propriedade j
v^j	Vetor de velocidade de mudança da propriedade
φ_c	Fração da velocidade crítica
μ	Parâmetro da função seleção proposta por Austin
α	Parâmetro da função seleção proposta por Austin
α'	Parâmetro da função da curva de partição proposta por Whiten
Λ	Parâmetro da função seleção proposta por Austin
β	Parâmetro da função quebra
β'	Parâmetro da função da curva de partição proposta por Whiten
β^*	Parâmetro da função da curva de partição proposta por Whiten
γ	Parâmetro da função quebra
ω	Parâmetro da função quebra
ϕ	Parâmetro da função quebra
ζ_1	Parâmetro do modelo de taxa de quebra de Herbst e Fuerstenau
ζ_2	Parâmetro do modelo de taxa de quebra de Herbst e Fuerstenau
θ	Tempo de residência médio
ρ	Densidade ou massa específica do material

I. INTRODUÇÃO

A moagem em moinho de bolas é uma das operações mais importantes em usinas de processamento mineral. A distribuição de tamanhos de partículas do produto da moagem tem grande influência sobre a recuperação dos minerais valiosos, realizada em processos subsequentes. Segundo estatísticas (Chen *et al.*, 2007), os circuitos industriais de moagem normalmente representam cerca de 50% da despesa total com energia de uma usina de processamento mineral, porém esse processo conta com eficiência energética de apenas 10% na maioria dos casos.

A moagem a seco é uma variante importante da moagem em moinhos de bolas. Ela encontra importantes aplicações na moagem de clínquer e escória para a fabricação de cimento e a de vários minerais industriais. Como são frequentemente responsáveis pela geração do produto final, quaisquer distúrbios no processo não adequadamente controlados resultarão na produção de material fora das especificações comerciais, resultando em prejuízo na operação.

O modelo do balanço populacional (MBP) tem sido utilizado amplamente desde os anos 1980 e sua manipulação e aplicações em circuitos operando em regime estacionário é bastante consolidada para diversas operações de cominuição, o que é evidenciado pela existência de diversos simuladores comerciais amplamente utilizados na indústria (UsimPac[®], Modsim[®], JKSimMET[®]).

O modelo do balanço populacional (Ramkrishna e Borwanker, 1973) é uma ferramenta bastante útil na modelagem do processo de cominuição. Segundo Herbst (Herbst e Rajamani, 1982), este modelo, quando alimentado com informações adequadas sobre as

características de quebra do material, condições operacionais e de projeto, consegue prever resultados desse processo com erros inferiores a 2%.

Uma das principais limitações do modelo diz respeito à falta de compreensão do complexo e ineficiente mecanismo de transporte de massa do moinho. Estudos abordando a modelagem matemática dinâmica desses moinhos operando a seco são extremamente escassos na literatura (Liu e Spencer, 2004). Inclusive, pouco existe sobre as relações de transferência de massa adequadas à descrição da moagem a seco (Hogg, 1984).

Apesar do longo histórico de aplicação do MBP, ainda são relativamente escassos os estudos que permitem avaliar a premissa básica usada no escalonamento de moinhos, que é a validade do uso de informações obtidas na moagem descontínua, bem como relações empíricas de escalonamento, na previsão da moagem contínua. O número de estudos se torna ainda menor quando são levados em consideração aqueles nos quais o transporte do material no interior do moinho é analisado. O trabalho tem o objetivo de avaliar o erro associado à aplicação do modelo do balanço populacional à moagem contínua a seco em circuito aberto em escala piloto utilizando o método de escalonamento de Austin.

II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

II.1 Cominuição

Cominuição é uma das operações unitárias mais importantes no processamento de recursos minerais, assim como na fabricação de cimento e no processamento de grãos. Embora tenha sempre o objetivo principal de redução de tamanho de partículas, na indústria mineral a cominuição tem por meta a liberação física dos diferentes minerais de interesse, presentes no minério, de forma a permitir sua posterior concentração.

A cominuição pode ser classificada de acordo com a maneira pela qual as partículas sólidas são tensionadas, ou seja, comprimidas, impactadas, cisalhadas ou, como é normalmente o caso, uma combinação destes modos de aplicação de esforços (Tavares e King, 1998). No contexto da tecnologia mineral, o termo cominuição envolve as operações unitárias de britagem (dos tipos rolos, cônicos, martelos, de impacto, de mandíbulas e de rolos de alta pressão) e de moagem (dos tipos bolas, barras, semi-autógenos, autógenos e verticais) e, no sentido mais amplo, também as operações de classificação (dos tipos peneiras, hidrociclones, ciclones e classificadores helicoidais).

A moagem é, geralmente, realizada a úmido, podendo também ser realizada a seco, como é o caso da moagem de materiais que degradam em presença de água, como materiais pozolânicos (clínqueres de cimento e escória, por exemplo). No caso da moagem a úmido, o meio que envolve o material a ser moído exerce uma influência significativa no processo, pois previne a formação de aglomerados.

Uma comparação entre a moagem a seco e a úmido permite concluir que (Tavares, 2005):

- Aproximadamente 30% menos energia é necessária na moagem a úmido. Essa economia, entretanto, pode ser perdida devido ao custo adicional da secagem do material;
- O desgaste dos corpos moedores e revestimentos são de 3 a 5 vezes maior na moagem a úmido, dependente do tipo de revestimento;
- Devido à alta taxa de desgaste dos corpos moedores e revestimentos na moagem a úmido a contaminação do produto é muito maior do que na moagem a seco.

O rápido crescimento da indústria cimenteira disseminou o uso do moinho de bolas, e até o final do século XIX, eles já estavam sendo usados para moer minérios metálicos para processos de cianetação. Alguns anos mais tarde, moinhos já estavam sendo usados para moer outros tipos de minérios para alimentar processos de flotação. Como resultado das enormes toneladas processadas e da baixa eficiência da maior parte dos equipamentos usados no beneficiamento mineral, a quantidade de energia consumida na etapa da cominuição é muito grande. Atualmente os moinhos usam cerca de 2% da eletricidade gerada no mundo, na qual a moagem a seco consome cerca de 75% desta energia (Lynch e Rowland, 2005).

Os moinhos de bolas (Figura II-1) são utilizados desde a moagem primária, quando a alimentação contém partículas de até 200 mm de tamanho (em moinhos de bolas do tipo “run of mine”), até operações de moagem secundária, terciária e de remoagem. São normalmente construídos em forma de tubos que operam, desde a escala laboratorial até a escala industrial (Napier-Munn *et al.*, 1996).



Figura II-1 – Moinho tubular rotativo

Apesar de ser um dos maiores consumidores de energia na indústria mineral e apresentarem baixa eficiência, continua-se a preferir este tipo de moinho devido à sua confiabilidade, robustez, simplicidade, insensibilidade à ingestão acidental de corpos metálicos estranhos (provenientes de processos anteriores) e a aptidão para variação da taxa de alimentação (Beraldo, 1987).

Além destas excelentes qualidades, o moinho de bolas apresenta uma característica adicional, talvez a principal, que é a sua elevada razão de redução, abrangendo uma ampla faixa de tamanhos (de milímetros até dezenas de micrometros) (Napier-Munn *et al.*, 1996).

Durante sua operação, um circuito de moagem, experimenta muitas perturbações, como variações nas propriedades do minério, na taxa de alimentação e ainda na distribuição de tamanho da alimentação. Embora alguns desses distúrbios possam ser corrigidos pela manipulação dos parâmetros de operação do moinho, outros tendem a gerar um produto fora das especificações estabelecidas (Rajamani, 1991).

A previsão do produto gerado em um processo que ainda não existe ou que sofre distúrbios quando em operação, tanto no regime estacionário quanto em regime transiente, é realizada com o auxílio de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos de um processo são formados pelo conjunto de modelos dos equipamentos, constituindo um sistema de equações que descrevem os fenômenos que regem o seu comportamento.

O modelo de processo de cominuição deve representar como a energia aplicada ao material produzirá a sua quebra e como esta quebra se processará em termos de propriedades do material (Carvalho, 2009). Os modelos de cominuição estão intimamente relacionados com o grau de redução de tamanhos, geralmente expressa por algum ponto da curva de distribuição granulométrica (d_{10} , d_{50} ou d_{80}) ou pela proporção de produto final gerado no processo. Os materiais gerados pelos processos de cominuição são caracterizados pela distribuição dos tamanhos de partículas, que pode ser medida por meio de diferentes técnicas de aferição como peneiramento, difração de raios laser, etc.

A distribuição de tamanhos pode ser representada, usando uma curva contínua ou de forma discreta por um conjunto de números $P(x)$ que representam cumulativamente a proporção de partículas menores que o tamanho x (Carvalho, 2009). A Figura II-2 exemplifica este tipo de representação.

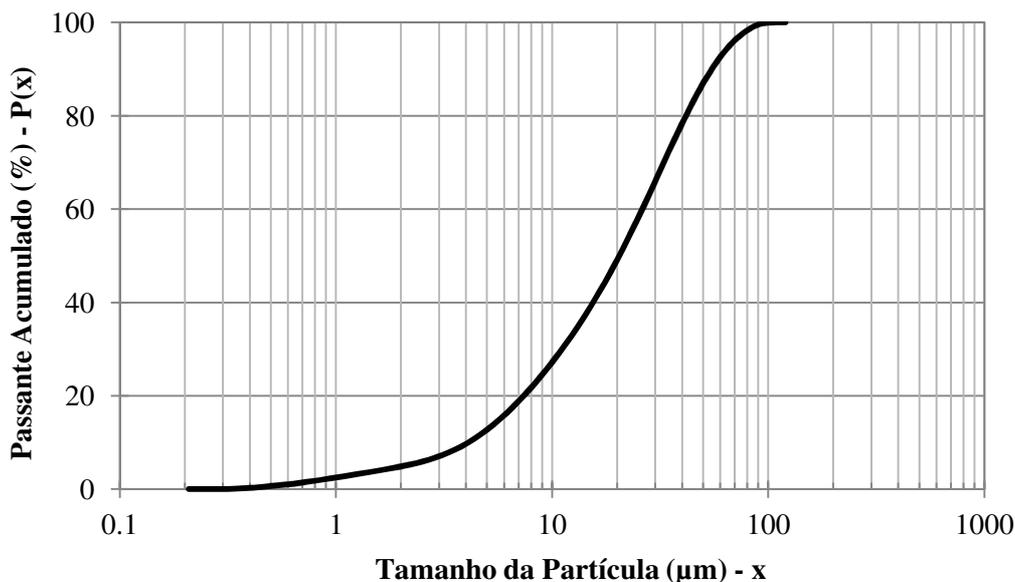


Figura II-2 – Exemplificação de uma distribuição granulométrica.

II.2 Condições Operacionais do Moinho de Bolas

O princípio de funcionamento do moinho de bolas é extremamente simples e se baseia no movimento rotativo da câmara de moagem em torno de seu eixo longitudinal. Nela são inseridos os corpos moedores (como as bolas) e os materiais particulados que serão cominuídos (como os minérios), que se encontram livres em seu interior.

Os corpos livres são elevados pelo movimento rotativo da carcaça até certo ponto, de onde caem, realizando trajetórias parabólicas, sobre outros corpos (Figura II-3). A energia aplicada ao moinho determina o movimento da carga livre, porém o trabalho realizado pela carga não promove a quebra de todas as partículas. A energia de impacto dos corpos deve ser elevada o suficiente para promover a quebra das partículas, porém deve ser suficientemente baixa a fim de evitar o efeito de reaglomeração das partículas finas originadas nos eventos anteriores de quebra.

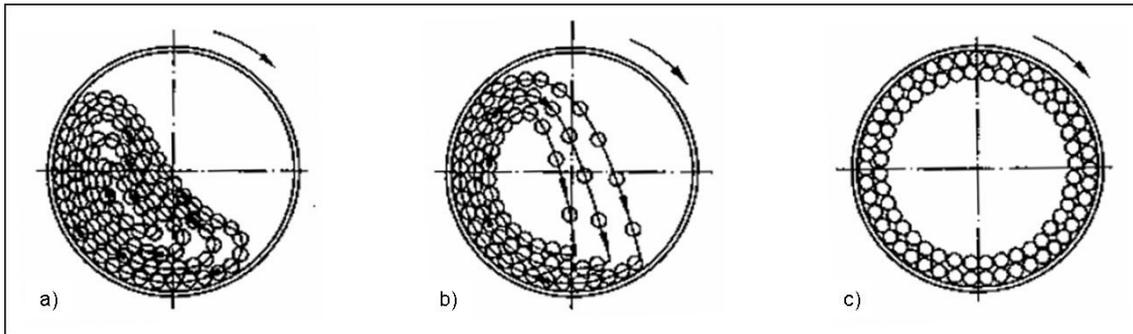


Figura II-3 – Estados de movimento de corpos moedores: a) cascata; b) catarata; c) centrífugo (Tavares, 2005).

É natural esperar que o movimento dos corpos no interior do moinho dependa de sua velocidade de rotação (N). Contudo, o parâmetro normalmente usado para indicar a velocidade de operação é a fração da velocidade crítica (φ_c), definida pela razão entre a velocidade de operação e a velocidade crítica (N_c) do moinho. A velocidade crítica (N_c) é definida como a menor velocidade de rotação na qual as bolas serão centrifugadas nas paredes internas do moinho, expressa da seguinte forma:

$$N_c = \frac{42,2}{\sqrt{D_m - d_{cm}}} \quad (\text{Eq.1})$$

onde D_m é o diâmetro interno do moinho (em metros), d_{cm} é diâmetro máximo das bolas (em metros), sendo a velocidade expressa em rotações por minuto (rpm). O moinho possuindo uma carga de bolas, como mostra a Figura II-3, irá apresentar diferentes regimes que dependem, principalmente, da velocidade de operação. Para baixas velocidades de operação, ou seja, para pequenas frações da velocidade crítica, o regime característico da carga é o de cascata. Nele, as bolas movem-se umas sobre as outras em camadas concêntricas, produzindo moagem por compressão e um pouco por impacto. Com o aumento da velocidade de operação, a carga começará a realizar movimentos parabólicos, caindo sobre outras, produzindo intensa moagem por impacto. Quando o

moinho atinge velocidade de operação próxima à velocidade crítica, o regime imposto à carga será o centrífugo, no qual a moagem produzida se torna, progressivamente, mais limitada. É por esta razão que, na maioria dos moinhos, a velocidade de operação se situa entre 60% e 85% da velocidade crítica.

O enchimento proporcionado pelos corpos moedores é tão importante na moagem que é adotado também como parâmetro de operação. O Grau de Enchimento (J) do moinho se expressa, convencionalmente, como a fração do volume interno do moinho ocupado pelos corpos moedores e pelos espaços vazios entre eles, sendo dado por:

$$J = \frac{V_{cm}}{V_m (1 - fp)} \quad (\text{Eq. 2})$$

sendo V_{cm} o volume dos corpos moedores, V_m o volume do moinho, e fp a fração de vazios, tomado nominalmente como 0,4. Os corpos moedores geralmente ocupam entre 20 e 50% do volume interno de um moinho de bolas. Já o parâmetro que relaciona a carga de material (V_{mat}) com a carga de corpos moedores é o Preenchimento de Vazios (U) (Austin e Concha, 1993):

$$U = \frac{V_{mat}}{fp V_{cm}} \quad (\text{Eq. 3})$$

Analisando o material contido no moinho, o tamanho de partícula do produto dependerá de quanto tempo o material permanecerá retido. Se a vazão ou taxa de alimentação de um moinho diminui, o material irá permanecer por mais tempo no moinho, sofrendo um maior número de eventos de fratura e, portanto, moendo-se mais finamente. Logo, o tempo de retenção ou residência é um componente fundamental para a descrição das operações de moagem, o que torna a taxa de alimentação da operação a principal

ferramenta de controle do produto, em uma condição operacional do equipamento (Austin e Concha, 1993).

II.3 Modelos Aplicados na Cominuição

Uma variedade de modelos matemáticos pode, em princípio, ser usada para prever resultados processos de cominuição. Em 1980, Herbst e Fuerstenau (Herbst e Fuerstenau, 1980) classificaram os modelos de acordo com o detalhamento físico que eles continham, e com a dificuldade experimental e computacional associada ao seu uso. Atualmente os modelos aplicados à cominuição são classificados de acordo com o nível de detalhamento dos fenômenos físicos que ele descrevem.

II.3.1 Modelos Clássicos ou Empíricos

Na metade do século XIX surgiu a necessidade de estabelecer condições padrão de operação de equipamentos de moagem devido à crescente produção de minerais. Distintos grupos de pesquisadores envidaram grandes esforços buscando formulações e verificações empíricas de relações matemáticas que caracterizassem os diversos mecanismos de fratura que ocorrem nos moinhos de bolas (Alves, 2006).

A ruptura de qualquer corpo sólido requer a aplicação de esforços, que, quando suficientes sobre o material, conseguem fraturar o corpo. Durante o processo de cominuição, a coesão interna das partículas só será destruída quando os esforços externos forem superiores a resistência à ruptura das partículas, na qual envolve a

propagação de trincas. Portanto, quanto mais energia for absorvida pela partícula, mais fina será a distribuição de tamanhos do produto gerado pela quebra.

Uma expressão empírica, muito aproximada, para a absorção de energia durante a fragmentação pode ser obtida seguindo a variação de um tamanho representativo da população, geralmente o tamanho relativo à fração passante em 80%, à medida que o mesmo diminui gradualmente com o aumento de energia introduzida no material. A relação entre a energia cominutiva absorvida por unidade de massa do material (E^*) e o tamanho representativo (x) é definida pela equação diferencial (Tavares, 2005):

$$\frac{dE^*}{dx} = f(x) \quad (\text{Eq. 4})$$

na qual $f(x)$ é uma função decrescente que reflete o fato de que mais energia é requerida para diminuir o tamanho das partículas.

Várias formas funcionais para $f(x)$ foram propostas na literatura, sendo que as três mais importantes são as de Kick, Rittinger e Bond. Esses pesquisadores sugeriram funções do tipo $f(x) = -Kx^{-n}$, sendo a constante n igual a 1 para a equação de Kick, 1,5 para Bond e 2 para a de Rittinger, e K uma constante dependente do material. Aplicando a condição inicial de $E^* = 0$ para $x = x_1$ (partículas de alimentação), e $x = x_2$ o tamanho das partículas resultantes da cominuição, a equação diferencial pode ser facilmente integrada. Para Rittinger ($n = 2$), o resultado da integração será:

$$E = K \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \quad (\text{Eq. 5})$$

A primeira lei de redução de tamanho foi proposta por von Rittinger (von Rittinger, 1867), propondo que a relação entre a energia específica consumida é diretamente proporcional à área superficial gerada na operação de cominuição. A área superficial específica de uma tonelada de partículas de tamanho uniforme x é proporcional a $1/x$. Assim, segundo Rittinger, a energia útil consumida por tonelada é também proporcional a $1/x$. De forma análoga, para Kick ($n = 1$) tem-se:

$$E^* = K \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \quad (\text{Eq. 6})$$

Na segunda lei da cominuição, Kick (Kick, 1885) considera que a energia consumida é proporcional à razão de redução, ou seja, a redução do tamanho de uma população de partículas de tamanho representativo de 100 centímetros para 10 centímetros iria consumir a mesma quantidade de energia demandada para reduzir a granulometria de uma população de partículas de tamanho representativo de 1.000 centímetros para 100 centímetros (Tavares, 2005).

No caso de Bond ($n = 1,5$), o resultado será:

$$E^* = 2K \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right) \quad (\text{Eq. 7})$$

A lei de Bond, também conhecida como a terceira lei da cominuição, teria sido proposta com base na hipótese de que a interação das propriedades do material, como a tenacidade à fratura, tensões internas e o tamanho da trinca, controlam as condições de fratura (Teoria de Griffith). Portanto, segundo Bond, o trabalho realizado para fraturar uma partícula será inversamente proporcional à diferença da raiz quadrada dos tamanhos do produto e da alimentação (Tavares, 2005).

Hukki (1961) verificou que nenhuma destas leis poderia ser usada indiscriminadamente, sendo apenas adequadas para intervalos de tamanhos distintos. A Lei de Kick se aplica melhor à cominuição grosseira (> 10 mm) e, portanto sendo usada com algum sucesso em britadores; a Lei de Bond se aplica melhor à descrição da cominuição de partículas de tamanho intermediário e, portanto à moagem grosseira (barras ou bolas); a Lei de Rittinger seria mais adequada para descrever a moagem de partículas finas (10 a 100 μm).

Embora Bond tenha provado teoricamente e seja o principal método de dimensionamento de moinhos, sendo utilizado até hoje na indústria mineral, é atualmente de consenso o reconhecimento de que a Equação 7 é, na realidade, uma relação empírica que, em geral, se ajusta muito bem a resultados experimentais de moagem.

Bond definiu W_i , também chamado de *Work Index* ou índice de trabalho, como a energia específica (energia por unidade de massa) necessária para cominuir um material, de granulometria muito grosseira (teoricamente infinita) até uma granulometria fina, correspondente a 80% da massa de partículas menores que 100 μm , determinado experimentalmente em escala laboratorial através de um procedimento padronizado. Logo pode-se reescrever a Equação 7 como:

$$E^* = 10 W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{A_{80}}} \right) \quad (\text{Eq. 8})$$

na qual P_{80} e A_{80} são os tamanhos representativos de 80% do produto e da alimentação do moinho, respectivamente.

A definição de Wi instituída por Bond é apresentada pela Equação 9 como:

$$E^* = 10 Wi \left(\frac{1}{\sqrt{100}} - \frac{1}{\sqrt{\infty}} \right) = Wi \quad (\text{Eq. 9})$$

A energia determinada pela Equação 8 representa aquela encontrada em moinho de barras, operando a úmido e em circuito fechado com carga circulante (razão entre material reciclado e a alimentação nova) de 100%, de diâmetro interno de 2,44 metros, ou de moinho de bolas, com o mesmo diâmetro interno, operado a úmido em circuito fechado com um classificador espiral e com carga circulante de 250%. Essa estimativa de energia já inclui as perdas mecânicas do moinho, não incluindo as perdas do motor (Alves, 2006).

Qualquer condição de moagem que seja diferente da condição padrão usada por Bond exige o ajuste da equação de energia por meio de fatores de correção, conhecidos como fatores de eficiência de Rowland, podendo ser encontrados na publicação de Beraldo (1987).

As três leis da cominuição, particularmente a terceira postulada por Bond (Bond, 1952), têm sido extensivamente aplicadas para dimensionamento de novas instalações nas últimas décadas. Cabe destacar que a metodologia de dimensionamento proposta por Bond é a metodologia padrão adotada por praticamente todas as empresas especializadas de engenharia (Alves, 2006).

Para Alves (2006) a relação de Bond, com uma acurácia estimada em +/- 20%, tem-se demonstrado claramente insatisfatória. Entretanto, apesar de reconhecer a relação existente entre consumo específico de energia e tamanho de produto, ela é demasiadamente simplista em sua descrição de processo. Assim, por exemplo, a lei de

Bond não considera a importância da água no sistema de moagem a úmido operando em circuito fechado com hidrociclones onde a eficiência desses últimos como classificadores é fortemente dependente da vazão de água dosada no circuito. Tão pouco é possível, a partir das teorias anteriores, prever a razão de carga circulante a desenvolver para o sistema, cujo impacto no comportamento operacional do circuito não pode ser ignorado (Alves, 2006).

Essas sérias limitações e outras, tais como considerar apenas o tamanho de 80% da alimentação e do produto para caracterizar toda a distribuição, motivaram o interesse de diversos grupos de pesquisadores sobre a maneira de desenvolver novas metodologias de análise, apoiadas em uma caracterização matemática mais detalhada, dos distintos mecanismos básicos operacionais do processo.

II.3.2 Modelo Fenomenológico

Em muitas situações, um sistema de partículas está associado a processos, nos quais partículas são criadas, tanto como produto principal quanto como sub-produto. Nos processos, o número de partículas envolvidas, independente do equipamento, é tão grande que seria impossível desenvolver métodos para descrever detalhadamente o comportamento de cada partícula. Por outro lado, seria inadequado considerar que um pequeno grupo de partículas, com propriedades médias, possa representar toda uma população de partículas. Portanto, surge a necessidade da adoção de métodos que possam descrever o comportamento da população de partículas.

Os modelos fenomenológicos, como o próprio nome diz, são equações que descrevem os fenômenos de um processo através de estados de entrada e saídas; ou seja, são

equações que delineiam os balanços físicos, químicos ou físico-químicos de uma população, que sofre ação de um processo, sendo conhecido como Modelo de Balanço Populacional (MBP).

Partículas individuais diferem umas das outras em vários aspectos. As diferenças que são de interesse das operações de cominuição são, principalmente, as propriedades físicas, que influenciam o comportamento da partícula quando sujeita a qualquer processo de separação ou classificação (King, 2001).

A proposta do MBP fez com que alguns grupos seguissem diferentes linhas de pensamento nos seus modelos de cominuição, todos baseados no modelo do balanço populacional. Segundo Austin *et al.* (1984), Brown (1941) foi o primeiro a tentar construir um balanço de massa por tamanho diferencial para descrever o processo de moagem, mas a sua formulação era pouco elegante e demasiadamente pesada para ser aplicada.

Broadbent e Callcott (1956) estenderam o trabalho de Brown, os quais usaram álgebra matricial e conceitos de quebra estagiada para descrever o processo. Em 1947, Epstein usou uma formulação baseada em funções contínuas de probabilidade. Paralelamente, Sedlatschek e Bass (1953) forneceram, basicamente, a formulação apresentada por Austin *et al.* (1984), na qual afirma que a cinética da moagem depende das condições operacionais. Filippov (1961), Gaudin e Meloy (1962), e Gardner e Austin (1962), independentemente verificaram os conceitos, sendo os primeiros a demonstrar convincentemente a aplicabilidade do modelo para dados experimentais.

A formulação do MBP para processos industriais requer uma análise do sistema particulado para sintetizar o comportamento da população de partículas, e de seu

ambiente, a partir do comportamento de partículas isoladas em seus ambientes locais. Com isso, a população deve ser descrita pela distribuição de uma variável adequada, geralmente o número de partículas, mas, às vezes (e com bom senso), por outras variáveis, tais como massa ou volume (Ramkrishna, 2000).

O objetivo central do balanço populacional é descrever o movimento de partículas dentro do espaço de fase. A caracterização de uma população de partículas, através da distribuição de partículas no espaço-fase, fornece um procedimento de modelagem poderoso e formalizado. O espaço de fase da partícula pode ser dividido em duas sub-regiões: coordenadas internas e externas da partícula. Coordenadas externas referem-se à distribuição de partículas no espaço físico, que pode ser representado por coordenadas cartesianas X, Y e Z. Coordenadas internas referem-se às propriedades individuais das partículas. A ideia essencial é que, à medida que as partículas se movem pelo sistema, suas coordenadas, internas e externas, variam (King, 2001; Rajamani, 1992).

As coordenadas internas devem ser suficientemente numerosas para descrever a partícula com todo detalhamento necessário ao processo a ser descrito para sua completa caracterização (King, 2001). Alguns exemplos de coordenadas internas são:

- Tamanho de partícula (a mais importante);
- Composição química;
- Forma de partícula;
- Energia superficial específica.

O modelo do balanço populacional pode ser aplicado em processos que possuam uma ou mais coordenadas internas convenientes. Nos processos de cominuição, em geral, a

coordenada interna de interesse é o tamanho de partícula. A equação do modelo descreve as variações das características de populações de partículas para uma variedade de reatores, por exemplo, tambores de pelotização, leitos fluidizados, misturadores e moinhos (Ramkrishna e Bornwanker, 1973). No caso de moinhos, o modelo do balanço populacional tem sido usado com sucesso há mais de 40 anos na descrição do processo de moagem, permitindo o desenvolvimento de modelos que descrevem vários tipos de operações.

Rajamani (1992) descreveu o balanço populacional macroscópico, podendo ser usado para várias aplicações (Figura II-4), sendo V o volume de controle. Nessa formulação as coordenadas externas desaparecem, pois o modelo é integrado para o volume de controle de interesse.

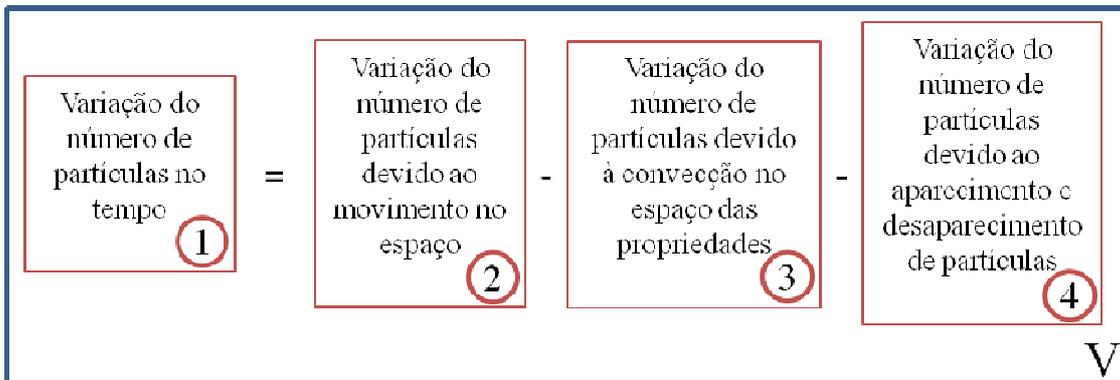


Figura II-4 – Esquema representativo do modelo do balanço populacional (adaptado de Rajamani, 1992).

A partir da representação esquemática da Figura II-4, chega-se à equação fundamental do MBP macroscópico (Rajamani, 1992), para certo volume V , dada por:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} (V \bar{\Psi}) = \frac{1}{V} (Q_{in} \Psi_{in} - Q_{out} \Psi_{out}) - \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial \zeta_j} (v^j - \bar{\Psi}) + (\bar{B} - \bar{D}) \quad (\text{Eq. 10})$$

Os termos da equação são numerados circunferencialmente: (1) sob o termo $\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} (V \bar{\Psi})$, (2) sob $\frac{1}{V} (Q_{in} \Psi_{in} - Q_{out} \Psi_{out})$, (3) sob $\sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial \zeta_j} (v^j - \bar{\Psi})$ e (4) sob $(\bar{B} - \bar{D})$.

sendo Ψ a função distribuída da variável desejada, no caso da Figura II-4 número de partículas, v^j o vetor velocidade de mudança da propriedade j , Q_{in} e Q_{out} os fluxos de entrada e saída no volume de controle, respectivamente, e $(\bar{B} - \bar{D})$ o termo de acúmulo.

No moinho, as colisões entre partículas e corpos moedores ocorrem de maneira catastrófica, gerando a fratura, ou morte de partículas grandes e o surgimento, ou nascimento, de, pelo menos, duas novas partículas menores. O balanço entre morte e nascimento é representado pelo termo 4 da Figura II-4. A variação contínua do tamanho de partícula (termo 3 da Figura II-4), resultante dos mecanismos de abrasão, pode ser desconsiderada no caso do moinho de bolas porque o tamanho dos corpos moedores é muito maior que o das partículas, embora evidências recentes (Tavares e Carvalho, 2009) mostrem que nem sempre isso é válido.

Portanto, a variação do número de partículas devido à convecção será igual à zero. Aplicando essas condições e considerando que a variável de interesse é o tamanho de partícula, tem-se a equação descritiva, em fração mássica, da moagem em moinho de bolas (Rajamani, 1992):

$$\frac{\partial[Hp(x, t)]}{\partial t} = W_{in}(t) p_{in} - W_{out}(t) p_{out} - s(x, t) p(x, t) H + \int_x^{x_m} b(x, x') s(x', t) p(x', t) H dx' \quad (\text{Eq. 11})$$

sendo H a massa de sólidos no interior do moinho (chamada de *hold-up*), p_{in} a função contendo a distribuição granulométrica da alimentação e p_{out} a função da distribuição granulométrica do produto, $W_{in}(t)$ e $W_{out}(t)$ as taxas de alimentação e descarga

respectivamente. A função $s(x, t)$, conhecida como função seleção, representa a taxa específica de quebra de partículas de tamanho x no tempo t . A função $b(x, x')$, conhecida como função quebra ou distribuição de quebra, representa a distribuição das partículas de tamanho x provenientes da quebra das partículas de tamanho x' , ou seja, $x < x'$.

Com o avanço da capacidade de processamento dos computadores, surgiram simuladores comerciais de processos de cominuição, munidos de modelos que descrevem as operações unitárias das usinas, cuja utilização já é consolidada, como é o caso do UsimPac[®], ModSim[®] e JKSimMet[®] (Carvalho, 2009). Diversos dos modelos contidos nesses softwares são baseados no MBP, sendo os simuladores ainda capazes de auxiliar o usuário a estimar, via retro-cálculo, parâmetros destes modelos para processos em estado estacionário com erros de 1 a 2% em relação ao processo (Herbst e Fuerstenau, 1980).

O avanço na compreensão do modelo do balanço populacional possibilitou o estudo das usinas de cominuição de maneira dinâmica, fornecendo subsídios para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de sistemas de controle (Carvalho, 2009). De acordo com Carvalho (2009), um dos primeiros trabalhos envolvendo propostas de sistemas de controle (baseados em modelos) utilizando o modelo do balanço populacional foi aquele desenvolvido por Herbst e Rajamani (1982), no qual uma estratégia de controle ótimo foi aplicada a um circuito de moagem operando em circuito fechado a úmido.

Mesmo tendo seu uso disseminado na indústria mineral, ele requer a utilização de funções empíricas complementares, como a função seleção e a quebra. É importante

reconhecer que o modelo do balanço populacional é apenas tão bom quanto os modelos que o compõem.

II.3.3 Modelo Mecanicista

O objetivo do modelo mecanicista é gerar relações detalhadas entre condições físicas no interior do equipamento e o efeito do processo. Para modelar o movimento das partículas, minério e elementos do equipamento, o modelo baseia-se na mecânica Newtoniana, analisando interação por interação entre partículas. Entretanto, é sabido que peças de aço, como as bolas do moinho, apresentam deformação predominantemente elasto-plástica quando submetidas a esforços mecânicos. Já os minérios apresentam pequenas deformações elásticas antes da ruptura não possuindo um comportamento plástico. Este tipo de abordagem faz com que uma simples aplicação das Leis de Newton, muito práticas, se torne muito complexa (Napier-Munn *et al.*, 1996).

Mishra e Rajamani (1992) aproximaram a interação entre bolas usando um modelo mola/amortecedor, apresentado na Figura II-5, considerando o movimento de cada bola em cada eixo (x, y, z) como um conjunto de vetores. Cada contato entre partículas irá gerar uma energia que irá depender da aceleração, da velocidade e da dureza das partículas, bem como da energia absorvida pelas mesmas. O método, amplamente usado, capaz de encontrar as energias envolvidas em cada contato, através da mecânica Newtoniana, é o Método dos Elementos Discretos (DEM).

O DEM é uma ferramenta poderosa, que torna possível monitorar e detalhar os choques individuais entre as partículas e as bolas (no caso de moinhos de bolas) ou até mesmo

visualizar e mensurar os esforços realizados sobre as partículas que estão no interior do equipamento. Ainda no caso de moinhos, o DEM pode ser utilizado para prever como a carga se comporta de acordo com parâmetros de projeto e operacionais, como o grau de enchimento, tipo de barras elevadoras, velocidade de rotação, etc. (Carvalho, 2009).

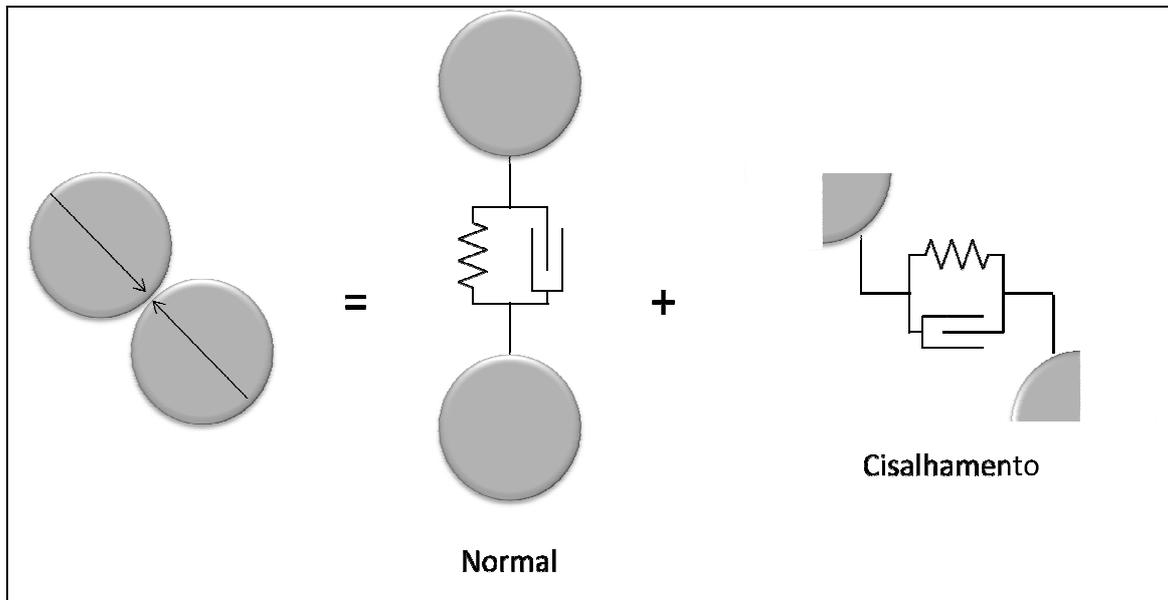


Figura II-5 – Apresentação do contato mola/amortecedor (adaptado de Mishra e Rajamani, 1994).

Portanto, através do método dos elementos discretos consegue-se determinar todos os espectros de energias presentes no interior do equipamento. Mas toda essa informação não é suficiente para determinar o produto da moagem, faltando saber qual será o comportamento da partícula quando submetida aos esforços. Para isso, diversos pesquisadores, como Cho (1987) e Tavares (1997), vem estudando a quebra de partículas em micro escala, desenvolvendo diferentes modelos, alguns empíricos, que relacionam a velocidade de quebra e a distribuição da quebra com a energia aplicada para a quebra.

Uma das restrições do modelo mecanicista é a demanda por um elevado poder computacional para realização dos cálculos dos contatos, o que, para um moinho, pode ser agravante devido às toneladas de corpos moedores utilizados no equipamento. Neste caso, uma simulação de DEM, por vezes, podem demorar meses, retardando uma eventual correção nas condições operacionais do equipamento.

Segundo Carvalho (2009), os parâmetros utilizados no modelo necessitam de calibração, como por exemplo, os coeficientes de restituição e de contato. Estes parâmetros são de difícil determinação empírica e exercem grande influência no resultado final (potência consumida e espectro de energias de impacto) desta ferramenta.

II.4 Investigação da Quebra em Moinhos

Na seção anterior, pôde ser observado que os modelos que descrevem a cominuição no interior de moinhos necessitam ser complementados, de alguma forma, por equações que descrevem a quebra das partículas. Com essa observação pode-se concluir que o sucesso da descrição matemática do equipamento dependerá da modelagem do fenômeno de quebra. A quebra de qualquer sólido só irá ocorrer se a força aplicada for maior que a resistência do sólido, ou seja, ela dependerá da propriedade específica do material e do mecanismo de quebra imposto pelo equipamento.

O comportamento de um sólido ao fraturar pode ter várias classificações, dependendo do critério abordado. Sob o ponto de vista da energia absorvida durante o processo de fratura, pode-se ter uma fratura frágil, associada a uma pequena quantidade de energia absorvida, ou uma fratura dúctil, onde é consumida uma grande quantidade de energia

antes de ruptura total do sólido. Essa habilidade do sólido em absorver energia até a sua fratura é conhecido como tenacidade à fratura.

As rochas, em geral, são caracterizadas por sua elevada dureza e baixa tenacidade à fratura. Na década de 1920, Griffith desenvolveu a teoria que serviu de base para a mecânica da fratura dos sólidos, a qual prevê que pequenas trincas pré-existentes em um sólido real propiciarão a fratura quando forem aplicadas forças externas, sendo estas menores do que a força esperada se fosse um sólido ideal. Isso explica a baixa tenacidade das rochas, pois essas possuem micro e macro defeitos em sua estrutura, proveniente tanto da sua formação geológica, quanto induzidas pelos processos de desmonte e cominuição à montante.

Assim, a teoria de Griffith sugere que as partículas finas são relativamente mais resistentes porque contêm menos falhas ou defeitos, ou seja, possuem baixa concentração de defeitos por unidade de volume. O resultado é que será mais difícil moer uma determinada massa formada por partículas finas do que por partículas grossas. Essa dificuldade explica, em parte, o fenômeno observado das menores taxas de quebra de finos em relação a grossos.

Infelizmente, a abordagem tradicional usada na resistência dos materiais e na mecânica da fratura, que se baseia na análise dos esforços e deformações específicas, não é normalmente possível nem conveniente para modelar a quebra de materiais particulados. As partículas normalmente apresentam formatos irregulares, de modo que a distribuição interna dos esforços resultantes da aplicação de uma carga externa não é conhecida (Figura II-6). Além disso, em processos de cominuição, frequentemente tem-se informação da quantidade de energia introduzida e/ou das condições operacionais do

processo, não havendo qualquer informação a respeito dos esforços sob os quais a partícula encontra-se submetida.

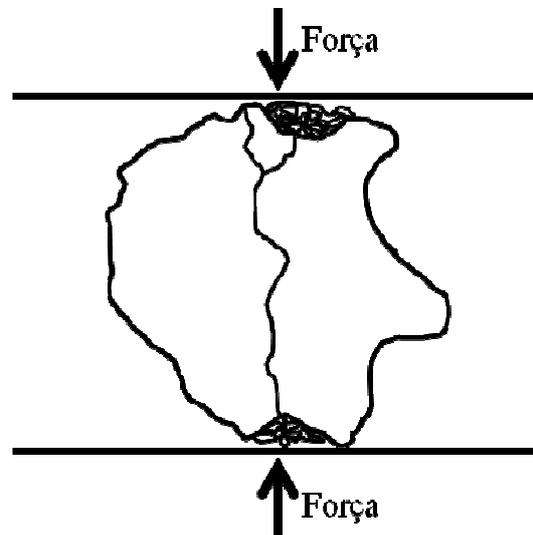


Figura II-6 – Representação da fragmentação de uma partícula.

O processo de quebra realizado pelo moinho ocorre em múltiplas fraturas, de tal maneira que as partículas geradas por uma quebra são imediatamente sujeitas a novos eventos de quebra, como resultado de sucessivos impactos. Na realidade o processo de quebra consiste em uma serie de etapas, na qual a partícula original ou mãe é fraturada, sofrendo, imediatamente em seguida, uma sequencia de fraturas sucessivas, gerando fragmentos filhas até que toda a energia disponível para a quebra seja dissipada. Estas sucessões de fraturas ocorrem tão rápido que aparentam ser um único evento (King, 2001).

Assim a população de partículas filhas é constituída pelo número de subpopulações das partículas mães, originadas ou pelo primeiro evento de quebra ou pelas sucessivas quebras. Isso significa que a distribuição de tamanhos das partículas filhas será reflexo da mistura das subpopulações mães. Cada partícula mãe terá uma única distribuição de

fragmentos filhas resultante, e cada filha será criada a partir de uma única mãe. O evento de quebra acontece com elevada frequência no moinho sendo mais conveniente considerar a quebra como um processo contínuo.

A complexidade da cominuição, reconhecida em vários estudos anteriores a 1960, levou pesquisadores da época a investigar os fenômenos físicos e os mecanismos envolvidos na fratura de partículas. Entretanto, a caracterização da fratura de partículas individuais encontrou limitações quanto à instrumentação necessária para medir algumas grandezas e à inexistência de sensores e equipamentos capazes de medir as variáveis de interesse, o que acabou ocasionando a estagnação de seu desenvolvimento (Carvalho, 2009).

Com base em toda essa análise sobre a quebra de partículas irregulares, alguns autores propuseram equações que descrevessem tanto o produto gerado pela quebra quanto a taxa com que as partículas serão quebradas. Várias tentativas têm sido feitas para determinar a forma da função quebra, mas nenhum modelo teórico foi obtido para reproduzir a distribuição granulométrica produzida em testes de quebra de partículas individuais. Entretanto, alguns modelos empíricos têm tido grande sucesso em descrever resultados experimentais. O modelo mais utilizado para representar essa função é baseado na mistura de populações com distribuições logarítmicas (King, 2001).

Já a equação que descreve como o tamanho irá variar no tempo é chamada de Função Seleção ou função taxa específica de quebra, na qual Austin *et al.* (1984) definiram essa cinética como função dos parâmetros operacionais e atribuiu à função de distribuição de quebra integralmente as características do material. Por outro lado, Herbst e Fuerstenau (1980) definem a taxa de quebra por meio de uma função empírica da potência específica aplicada na moagem. Whiten (1972), por sua vez, combina a quebra e uma

função que retém algumas partículas nos tamanhos originais após a quebra (*appearance function*) em único parâmetro, deixando o modelo com mais graus de liberdade para ajuste, o que, segundo Carvalho (2009), não teria compromisso com a cinética real do processo.

II.4.1 Função Seleção

Quando o moinho entra em operação, a massa contida em seu interior recebe uma variedade de impactos, de maneira que, após um intervalo de tempo t , esses eventos resultam na fratura das partículas, de maneira que se dá o desaparecimento de parte das partículas grossas e o aparecimento de fragmentos menores, os quais são adicionados às classes mais finas (Austin e Concha, 1993). A velocidade com que as partículas desaparecem da classe de tamanho 1 pode ser rescrita como:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -S_1 p_1(t) \quad (\text{Eq. 12})$$

sendo p_1 a fração de partículas pertencente a classe de tamanho 1 e S_1 uma constante de proporcionalidade (unidade: minutos⁻¹) que recebe o nome de taxa específica de quebra da classe de tamanho 1, ou seja, a classe correspondente às partículas mais grossas da distribuição (*top size*). Esta equação evidencia que o processo de moagem pode ser frequentemente descrito como um processo cinético de primeira ordem. Contudo, alguns tipos de materiais e condições de moagem apresentam, em certas ocasiões, diferentes efeitos não-lineares, tanto decorrentes do tipo de material quanto das condições de moagem (Austin e Concha, 1993).

A partir de resultados de ensaios de moagem descontínua de partículas originalmente numa faixa estreita de tamanhos (Figura II-7) e resolvendo a Equação 12, pode-se estimar a taxa específica de quebra S_1 :

$$\log \left[\frac{p_1(t)}{p_1(0)} \right] = -\frac{S_1}{2,3} t \quad (\text{Eq. 13})$$

sendo que a razão $p_1(t)/p_1(0)$ representa a fração remanescente de partículas na classe de tamanho 1 após um tempo t de moagem.

Na Figura II-7 pode-se observar um efeito de aumento da taxa específica de quebra com o aumento do tamanho de partícula, traduzindo-se na redução da resistência mecânica das partículas com o aumento do tamanho. Isto ocorre porque as partículas grossas possuem uma maior probabilidade de captura do que as partículas finas.

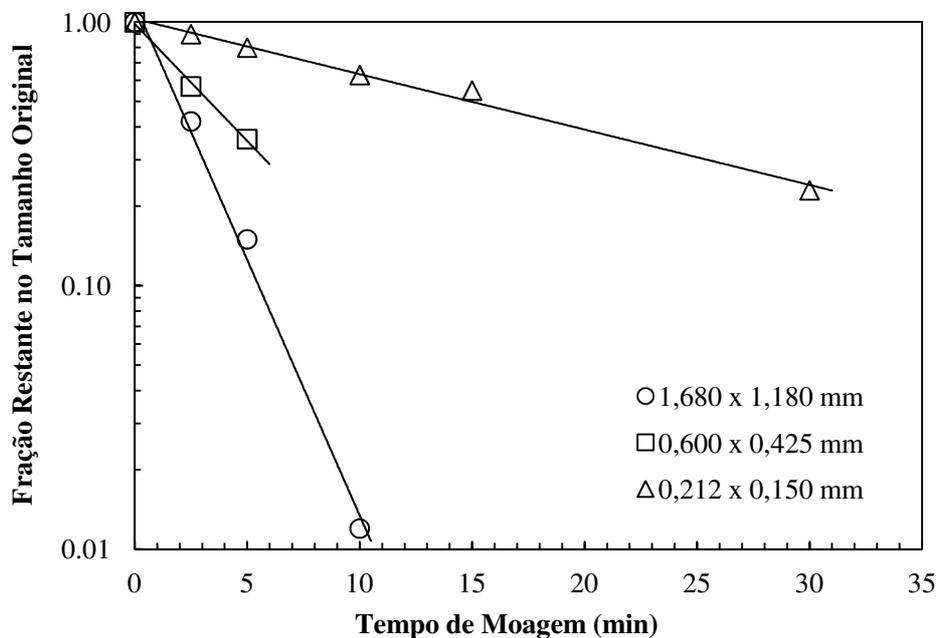


Figura II-7 – Efeito do tempo de moagem na fração restante do monotamanho original de um ensaio de moagem em batelada com uma amostra de clínquer. Pontos representam dados experimentais e as linhas representam suas linhas de tendência (Silva, 2007).

Ao relacionar as taxas específicas de quebra com seus respectivos tamanhos de partículas obtêm-se uma curva (Figura II-8) representada pela função seleção. Esta função descreve como ocorre a variação da taxa específica de quebra com o tamanho de partícula. Austin e colaboradores representaram a variação da taxa específica de quebra com o tamanho de partícula por meio da função (Austin *et al.*, 1984):

$$s_i = \frac{S_1(dp_i)^\alpha}{1 + \left(\frac{dp_i}{\mu}\right)^\lambda} \quad (\text{Eq. 14})$$

sendo dp_i o tamanho representativo (médio) das partículas, em milímetros, na classe de tamanhos i . S_1 , α , μ e λ são parâmetros que dependem tanto do material quanto das condições de moagem.

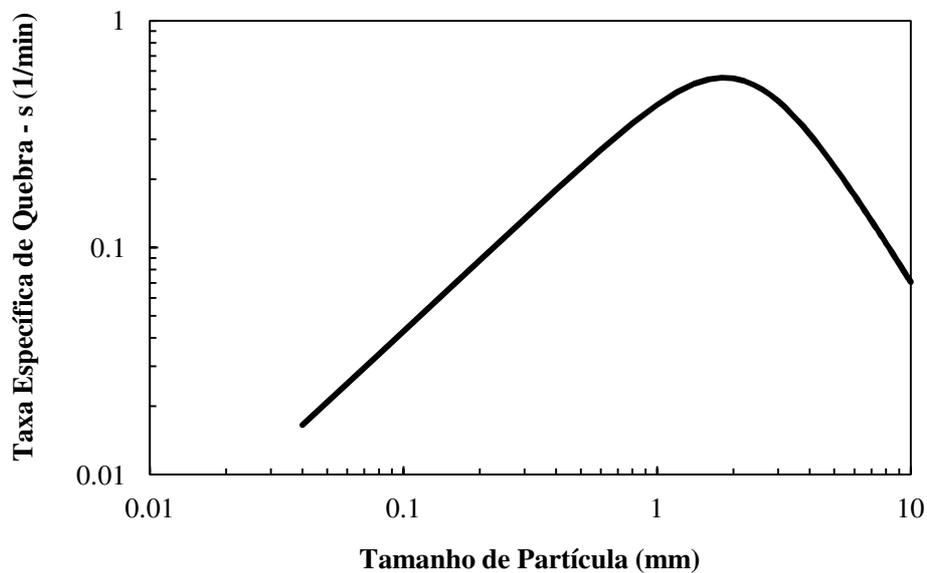


Figura II-8 - Representação da taxa específica de quebra encontrada para uma amostra de clínquer a partir da relação funcional proposta por Austin (Silva, 2007).

O aumento de tamanho da partícula não irá produzir um aumento indefinido na taxa específica de quebra. A inflexão presente na taxa específica de quebra ocorre porque as partículas, conforme ficam mais grossas, passam a demandar energias de impacto superiores às oferecidas pelos moinhos, de maneira que os esforços predominantes se tornam insuficientes para causar a fratura, fazendo com que a taxa específica de quebra passe por um máximo e decaia com o aumento do tamanho da partícula (King, 2001).

Outra maneira de determinar os parâmetros da função seleção proposta por Austin (Equação 14) consiste no uso de técnicas de estimação de parâmetros pelas distribuições granulométricas de amostras retiradas dos fluxos da alimentação e descarga de um moinho industrial (King, 2001). Essa metodologia é denominada retro-cálculo.

Dando continuidade à investigação da quebra em moinhos de laboratório, Austin e colaboradores propuseram relações entre as escalas de laboratório, piloto e industrial para a taxa específica de quebra a partir de dados experimentais. As principais variáveis operacionais que influenciam a taxa específica de quebra em um moinho são a velocidade de rotação, o diâmetro do moinho, o tamanho dos corpos moedores e o grau de enchimento. Essas relações são conhecidas como fatores de escalonamento (Austin e Concha, 1993).

As variáveis dominantes são o diâmetro interno do moinho (D_m) e o tamanho dos corpos moedores que constituem a carga (d_{cm}). Estas variáveis em conjunto determinam a energia de impacto média no moinho já que alteram o número de impactos que ocorrem por segundo por unidade de volume no moinho. Como a taxa específica de quebra é essencialmente uma função cinética do processo, essa alteração provocada na energia de impacto média irá influenciar significativamente o valor do parâmetro S_1 na Equação

14. As demais variáveis estão associadas à frequência de impactos gerada pelo moinho, a qual varia a uma taxa proporcional à fração de velocidade crítica. A influência do grau de enchimento e do preenchimento de vazios na variação da frequência de impactos é bastante complexa, sendo modelada empiricamente (King, 2001).

Adicionando os fatores de escalonamento de Austin à Equação 14, tem-se que:

$$s_i = \frac{S_1 (dp_i)^\alpha}{1 + \left(\frac{dp_i}{\mu C_1}\right)^\lambda} C_2 C_3 C_4 C_5 \quad (\text{Eq. 15})$$

na qual,

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(\frac{D_m}{D_{mT}}\right)^{0,2} \left(\frac{d_{cm}}{d_{cmT}}\right) \\ C_2 &= \left(\frac{d_{cmT}}{d_{cm}}\right) \\ C_3 &= \left(\frac{D_m}{D_{mT}}\right)^{0,5} \\ C_4 &= \left(\frac{1 + 6,6J_T^{2,3}}{1 + 6,6J^{2,3}}\right) \exp(-c(U - U_T)) \\ C_5 &= \left(\frac{\varphi_c - 0,1}{\varphi_{cT} - 0,1}\right) \left(\frac{1 + \exp(15,7(\varphi_{cT} - 0,94))}{1 + \exp(15,7(\varphi_c - 0,94))}\right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 16})$$

sendo D_m o diâmetro do moinho, d_{cm} o diâmetro médio dos corpos moedores, J o grau de enchimento do moinho, U o grau de preenchimento de vazios e φ_c a fração da velocidade crítica do moinho. O índice T se refere aos parâmetros utilizados no ensaio padronizado no moinho descontínuo. O parâmetro c do fator C_4 é, normalmente, tomado como igual a 1,2 para moagem a seco e 1,3 para moagem a úmido.

Na tentativa de simplificar a descrição dos efeitos das influências das dimensões e das condições operacionais dos moinhos nas funções que descrevem a quebra de partículas em moinhos, Herbst e Fuerstenau (1980) desenvolveram um método no qual é possível

relacionar a taxa específica de quebra com a energia gasta na quebra, ou seja, com a energia necessária para reduzir o tamanho da partícula. Eles afirmaram que a variação da taxa específica de quebra e da função quebra com as condições de operação do moinho pode ser, essencialmente, representada pelas variações dessas mesmas funções com relação à potência específica utilizada. Assim, a taxa específica de quebra de partículas da classe de tamanho i (s_i) é proporcional à potência específica que é aplicada à carga do moinho (King, 2001):

$$s_i = S_i^E \frac{Pot}{H} \quad (\text{Eq. 17})$$

sendo Pot a potência que o moinho demanda durante sua operação, excluindo a potência consumida por perdas mecânicas ou por atrito, H é a massa de material do moinho (*hold-up*) e S_i^E é a taxa específica de quebra para partículas na classe de tamanhos i relacionada à potência específica. A proposta principal de Herbst e Fuerstenau é que o modelo da função S_i^E só depende do material e não varia com as dimensões ou condições de operação do moinho. A variação da taxa de quebra da energia específica com o tamanho de partícula é dada por:

$$\ln\left(\frac{S_i^E}{S_1^E}\right) = \zeta_1 \ln\left(\frac{dp_i}{dp_1}\right) + \zeta_2 \left(\ln\left(\frac{dp_i}{dp_1}\right)\right)^2 + \dots \quad (\text{Eq. 18})$$

A Equação 18 representa a taxa específica de energia de quebra como uma série logarítmica em função do tamanho de partícula. Normalmente só se usam os dois primeiros termos desta série. A partir de dados experimentais é possível construir um gráfico da taxa específica de energia de quebra versus tamanho de partícula, do qual se

obtem os parâmetros da função. Os valores dos parâmetros S_i^E e dp_1 são definidos como um ponto de referência e as constantes ζ_1 e ζ_2 podem ser determinadas graficamente.

II.4.2 Função Quebra

Materiais particulados são fraturados primariamente pela imposição de tensões compressivas, sejam aplicadas de forma lenta ou rápida, principalmente por meio do impacto. A fragmentação ocorrerá como resultado da propagação das fraturas presentes nos sólidos gerando fragmentos, ou seja, partículas de menor tamanho.

Diferentes fenômenos de fragmentação e diferentes distribuições de fragmentos serão geradas como resultado da aplicação de esforços de diferentes magnitudes e tipos. Quando a partícula é sujeita a esforços normais insuficientes para causar a sua ruptura, a fragmentação superficial pode ocorrer pelo mecanismo de abrasão. Por meio deste, a partícula sofre uma redução de tamanho quase imperceptível, enquanto que partículas finas são geradas.

Quando a intensidade de energia é baixa, o mecanismo de fragmentação é a clivagem, gerando alguns fragmentos relativamente grossos e muitos fragmentos mais finos que a partícula original. A distribuição de partículas resultante é relativamente estreita e frequentemente bimodal. A elevada taxa de compressão ocorre uma intensa fragmentação da partícula, pelo mecanismo conhecido como estilhaçamento, resultando em um amplo espectro de tamanhos de fragmentos.

É evidente que a quebra de uma única partícula irá produzir, no mínimo, duas novas partículas de tamanho menor. A distribuição granulométrica da fratura primária pode ser

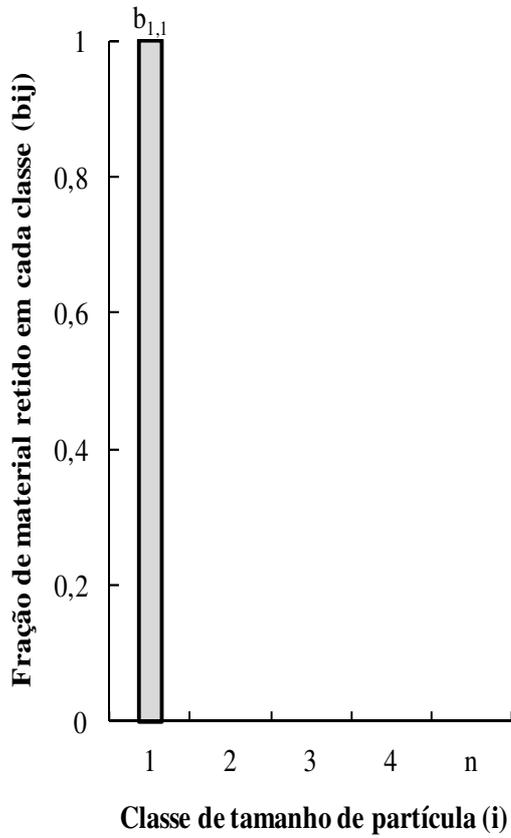
descrita de duas formas. A primeira consiste em definir o parâmetro b_{ij} que representa a fração do material inicial contido na faixa de tamanhos j que passou ao novo tamanho i , sendo que $n \leq i \leq j$. A fratura primária produz uma distribuição com vários tamanhos de partícula i , porém para a descrição da fratura dos tamanhos de interesse se precisa de uma matriz contendo os elementos b_{ij} , ilustrado na Figura II-9 (Barrios, 2010). Os índices i e j estão associados às classes de tamanhos de partículas tal que quanto menor for o índice maior será o tamanho de partícula a ele relacionado.

A Figura II-9 apresenta a distribuição dos fragmentos originados pela quebra primária nas classes ou faixas de tamanhos abaixo da classe ou faixa de tamanho das partículas mães. A segunda forma de representar a distribuição das partículas filhas é calcular o valor B_{ij} que é a versão cumulativa dos valores de b_{ij} para o tamanho j , conforme apresentada a Equação 19:

$$B_{i,j} = b_{i,j} + b_{i+1,j} + \dots + b_{n,j} = \sum_{k=i}^n b_{k,j} \quad (\text{Eq. 19})$$

Sistema inicial (t_0)

Material contido na classe 1



Sistema após a fratura primária (t_1)

Material distribuído nas demais classes

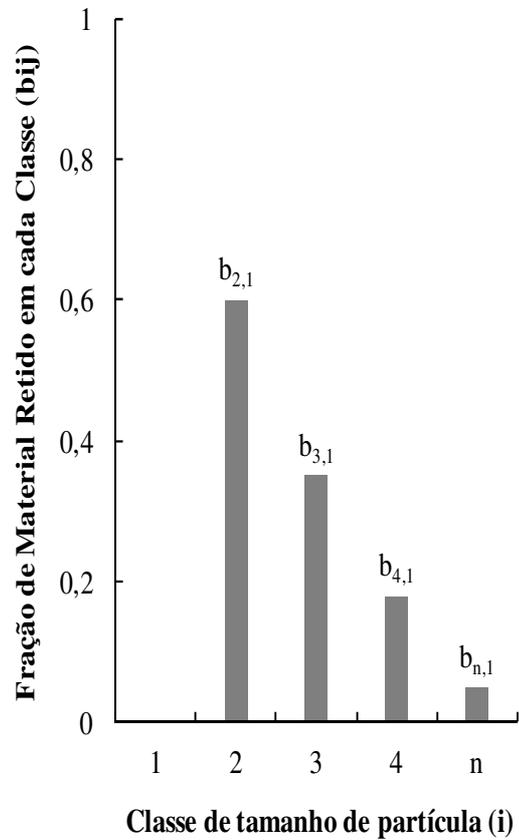


Figura II-9 - Distribuição de tamanhos de um material monotamanho antes e depois da fratura primária (Barrios, 2010).

Portanto, a relação entre a distribuição granulométrica da fratura primária e a razão de tamanhos de partículas geradas na forma adimensional (D_i/D_j) pode ser expressa na forma cumulativa B_{ij} numa escala logarítmica como mostra a Figura II-10.

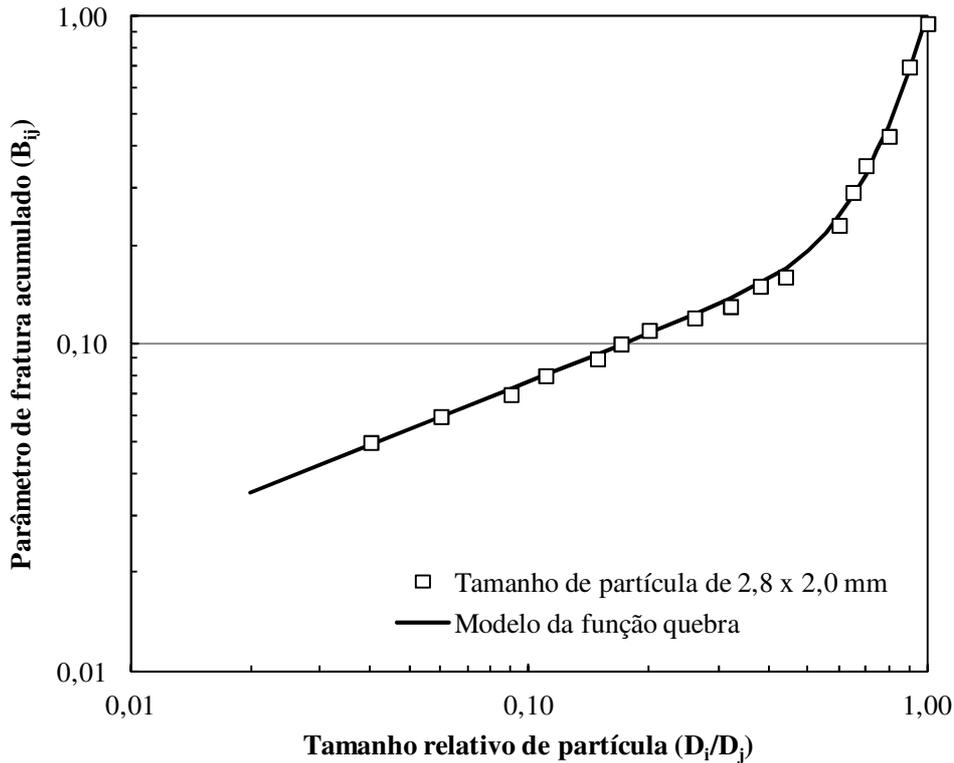


Figura II-10 – Modelo da função quebra para a distribuição acumulada da fratura primaria das partículas na faixa de 2,8 x 2,0 mm de uma amostra de minério de cobre.

Os valores B_{ij} podem ser ajustados a uma função empírica (Equação 20) constituída por duas linhas retas no plano logarítmico. A geometria da função fornece informações cruciais referentes ao papel que cada um dos parâmetros da equação exerce, e também fornece um método bastante conveniente para a estimativa dos parâmetros quando dados experimentais estão disponíveis (Barrios, 2010). O modelo, apresentado na sua forma discreta e acumulada, é dado por:

$$B_{ij} = \phi \left(\frac{D_i}{D_j} \right)^\gamma + (1 - \phi) \left(\frac{D_i}{D_j} \right)^\beta \quad (\text{Eq. 20})$$

sendo ϕ , β e γ são característicos do material e D é o vetor de classes de tamanhos de partícula que representa cada uma das aberturas das peneiras usadas na análise granulométrica do material.

Na prática, observa-se que alguns materiais apresentam uma função não-normalizável, ou seja, a função passa a depender tanto da razão de tamanhos quanto do tamanho da partícula de origem ou um tamanho característico de partículas geradas (D^*). Essas última influência pode ser modelada através das equações (King, 2001):

$$B_{ij} = \phi \left(\frac{D_i}{D^*} \right)^\omega \left(\frac{D_i}{D_j} \right)^\gamma + (1 - \phi) \left(\frac{D_i}{D_j} \right)^\beta \quad \text{para } D_i < D^* \quad (\text{Eq. 21})$$

$$B_{ij} = \phi \left(\frac{D_i}{D_j} \right)^\gamma + (1 - \phi) \left(\frac{D_i}{D_j} \right)^\beta \quad \text{para } D_i \geq D^* \quad (\text{Eq. 22})$$

na qual os parâmetros D^* , ω , ϕ , β e γ variam de acordo com o material.

Segundo evidências experimentais, os valores da função quebra não são sensíveis às condições de moagem como o a massa de material dentro de um moinho de bolas (*hold-up*), a carga de corpos moedores e o diâmetro do moinho. Isso foi demonstrado por Shoji *et al.* (1979) , na faixa normal de operação dos moinhos.

Na prática isso quer dizer que a média das fraturas efetuadas pelo choque entre bolas, dentro de um moinho, será igual para moinhos de diferentes diâmetros e operados em diferentes condições (Austin e Concha, 1993). Ainda está implícito no sistema que os valores de B_{ij} não variam com o tempo, fato que Gardner e Austin (1962) demonstraram por meio de experimentos utilizando traçadores radioativos.

Dentre os métodos experimentais para a determinação da função quebra, o mais utilizado consiste na realização de ensaios de moagem em batelada em tempos bastante curtos, com um material previamente classificado em uma faixa estreita de tamanhos. Esse procedimento visa garantir que eventos secundários de fratura sejam minimizados, de maneira que a distribuição granulométrica resultante possa ser correlacionada com a função quebra cumulativa B_{ij} . Outro método consiste na calibração dos parâmetros da função quebra a partir de dados de distribuição granulométrica de ensaios de moagem em batelada com tempos variados de moagem, utilizando a solução do modelo do balanço populacional para a moagem descontínua e um procedimento de retro-cálculo (Barrios, 2010).

II.5 Desenvolvimento Matemático do Modelo do Moinho

Neste trabalho, o modelo do moinho irá se basear no Modelo do Balanço Populacional (MBP, como descrito no Tópico II.3.2) para a modelagem do processo de moagem em um moinho de bolas operado a seco.

II.5.1 Formulação Geral do Modelo

Nos trabalhos experimentais, a distribuição do tamanho de partículas é, normalmente, quantificada pelo fracionamento do material com o auxílio de uma série de peneiras. Nesta forma, a população de partículas é discretizada em n classes de tamanhos de peneiras, na qual as partículas mais grossas são classificadas na classe de tamanhos 1 e as partículas mais finas na classe de tamanho n .

Usando este simbolismo, o intervalo de tamanho que será quebrado pode ser denotado por j , e o intervalo de tamanho inferior, que recebe o produto desta quebra, pode ser denotado por i , na qual $n \geq i > j$. Logo, não se tem qualquer informação dos tamanhos entre peneiras; em outras palavras, a distribuição do tamanho de partícula não é contínua, mas sim discreta em cada intervalo de peneira. Aplicando a discretização de tamanhos na Equação 11, o resultado será:

$$\frac{d[H(t) p_i(t)]}{dt} = W_{in,i}(t) p_{in,i} - W_{out,i}(t) p_{out,i} - s_i(t) p_i(t) H(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j(t) H(t) \quad (\text{Eq. 23})$$

Reescrevendo a Equação 23 utilizando o conceito de derivada do produto, a equação do MBP é discretizada em classes de tamanhos, demonstrado na equação:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \left[W_{in,i}(t) p_{in,i} - W_{out,i}(t) p_{out,i} - s_i(t) p_i(t) H(t) + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j(t) H(t) \right) - p_i(t) \frac{dH(t)}{dt} \right] \frac{1}{H(t)} \quad (\text{Eq. 24})$$

Essa equação, apesar de geral e aplicável diretamente a um reator de mistura perfeita, deve ser complementada por outras funções para a fim de descrever a moagem contínua. As funções primárias são: a função seleção (s_i), a função quebra (b_{ij}), a distribuição de tempos de residência ($E(t)$) e a função classificação interna. Ainda a fim de resolver o

balanço populacional dinâmico da moagem deve-se estabelecer uma função que descreva a transferência de massa dentro do moinho ($dH(t)/dt$).

O esquema de um moinho de bolas contínuo, alimentado por uma vazão de sólidos W_{in} com distribuição granulométrica p_{in} , gerando um produto a uma vazão de sólidos W_{out} e com distribuição p_{out} é ilustrado na Figura II-11.

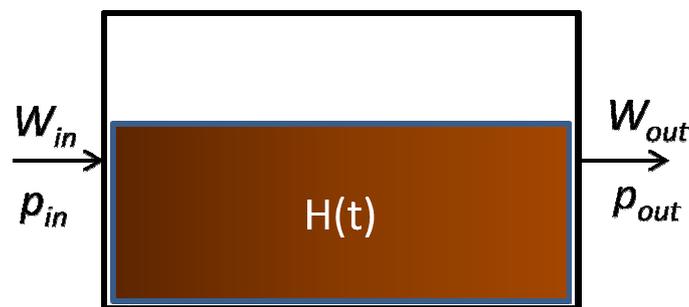


Figura II-11 – Moinho contínuo como um único reator de mistura perfeita.

II.5.1.1 Relações de Transferência de Massa

O transporte de partículas no moinho, ou seja, a movimentação axial da carga, é resultante da combinação dos efeitos de gravidade, escoamento, e da ação mecânica de rotação do moinho. A importância relativa de cada efeito irá depender do tipo de moinho e das condições específicas de moagem (Hogg, 1984).

Em quase todos os processos em que o movimento de partículas é um sub-processo da operação, o *hold-up* (ou material retido no interior do moinho) é o parâmetro básico para estimar o tempo médio que o material permanece no moinho enquanto percorre toda a sua extensão e, com isso, estimar o movimento das partículas dentro do equipamento. Portanto, o tempo de residência médio e o *hold-up* do moinho estão inter-

relacionados, sendo um ou outro necessário para controlar o fluxo de partículas através do equipamento (Abouzeid e Fuerstenau, 1980).

A quantidade de material retida no moinho é função das condições de operação, tais como o volume de corpos moedores, velocidade do moinho, taxa de alimentação, diâmetro e comprimento do moinho, dimensões e geometria dos *lifters*, bem como do diafragma de descarga (Songfack e Rajamani, 1999).

Na década de 1950, alguns pesquisadores estudaram a transferência de massa em tambores horizontais, os quais se assemelham a moinhos tubulares rotativos. Vahl e Kingma (1952) propuseram uma série de relações matemáticas baseadas em considerações empíricas, de forma a caracterizar o transporte de sólidos em um tambor rotativo horizontal, com superfície interna livre de qualquer mecanismo de elevação de carga e com descarga livre. Embora modelos matemáticos como esses tenham sido desenvolvidos para tais condições, eles não podem ser aplicados diretamente nos moinhos, já que os modelos sugeridos lidam com tubos com superfície lisa, enquanto a superfície interna do moinho de bolas é constituída de perfis horizontais (*lifters*), no intuito de elevar a carga dentro do tambor. Além disso, o moinho frequentemente dispõe, em seu interior, de um diafragma que controla a liberação do material. De fato, Austin *et al.* (1974) revisou as principais relações e resultados de Vahl e Kingma (1952) com o objetivo de aplicá-las à transferência de massa em moinho de bolas, citando as modificações dos modelos originais e sugerindo novas relações.

O padrão de fluxo que é desenvolvido nos equipamentos de processamento é, geralmente, muito complexo e, normalmente, não pode ser descrito em termos de funções matemáticas simples. No entanto, dois padrões ideais podem ser facilmente descritos e formam a base de uma análise útil dos modelos de fluxo real. Os dois

modelos que podem ser facilmente descritos são aqueles que descrevem as condições de mistura perfeita e de fluxo empistonado. O modelo de mistura perfeita presume que o material é completamente homogeneizado por uma mistura eficiente em todo o volume. O outro extremo do tipo de mistura é representado pelo modelo de fluxo empistonado, no qual sucessivas partes do material, de volume definido, se movem através de um dispositivo de perfil simples. Embora esses modelos ideais nunca sejam realmente encontrados na prática, muitos sistemas operam de forma que um ou outro modelo de fluxo ideal, ou algumas combinações deles podem servir como modelos e, consecutivamente, serem usados para avaliar o efeito que a distribuição do tempo de permanência pode ter sobre o desempenho dos equipamentos (King, 2001).

Em grande parte, os processos reais podem ser aproximados pelos casos ideais com um erro muito pequeno sendo que, em outros casos, os desvios em relação à realidade podem ser consideráveis. A maioria dos processos reais (incluindo a moagem em moinhos de bolas) apresenta características de transporte localizadas entre estes dois extremos de fluxo (Schofield, 1980).

Austin *et al.* (1984) estudaram a distribuição de tempos de residência no interior de moinhos tubulares. Sua conclusão foi de que, na realidade, um moinho é uma mistura de configurações, podendo ser descrito por um conjunto de modelos de mistura perfeita e modelos de fluxo empistonado. Benzer (2005) e Da Silva (2007) adotaram uma configuração de múltiplos reatores de mistura perfeita acoplados em série a um modelo de classificação interna. Embora apropriada, a descrição do processo por este tipo de modelagem e a sua validação direta requerem a amostragem interna do moinho, o que nem sempre é viável. Makokha e Moys (2010) e Oliveira (2009) representaram moinhos

de bolas como um conjunto de três reatores de mistura perfeita (um reator grande e dois reatores pequenos e iguais) operando em série.

Outra abordagem foi adotada por Hogg (1984), sendo posteriormente estudada por Boulvin *et al.* (1999) e Lepore *et al.* (2003). O movimento de rotação do moinho de bolas promove tanto o transporte de massa quanto a quebra de partículas. Para Hogg (1984), apesar desses efeitos atuarem simultaneamente, eles deveriam ser tratados separadamente. Hogg concluiu que em moinhos operando a seco com descarga do tipo diafragma, o transporte majoritariamente ocorre pelo mecanismo de difusão com um fluxo convectivo imposto pelos efeitos de parede. Embora existam evidências que o *hold-up* varie linearmente com a vazão dos sólidos, este tipo de modelo com difusão leva à elaboração de relações complexas para o *hold-up* de sólidos.

Cleary (2006) realizou um estudo fazendo uso do método de elementos discretos na simulação do transporte axial de sólidos em um moinho. Ele demonstrou que o transporte de partículas dentro do moinho é pouco dependente do tamanho de partícula, observando que apenas as partículas mais finas se deslocavam um pouco mais lentamente dentro do moinho.

O balanço de massas global do sistema permite calcular

$$\frac{dH(t)}{dt} = W_{in} - W_{out} \quad (\text{Eq. 25})$$

o que requer uma relação, normalmente dada empiricamente, entre a vazão de sólidos na saída do moinho (W_{out}) e a massa retida dentro do moinho, ou *hold-up* (H).

Austin *et al.* (1984) sugeriram uma relação empírica para moinhos tubulares na qual a taxa de descarga de sólidos é função do *hold-up* elevado a uma potência a ser

determinada. A indisponibilidade e a dificuldade na obtenção de dados de amostragem industrial fazem com que esse modelo baseado em uma relação potência se torne uma ferramenta muito interessante no desenvolvimento de modelos dinâmicos para circuitos de moagem (Carvalho, 2007).

Baseado nas conclusões dos trabalhos de Austin, Cleary e Hogg, tem-se:

$$W_{out} = a \left(\frac{H}{H^*} \right)^e \quad (\text{Eq. 26})$$

sendo a e e parâmetros que dependem das características construtivas do moinho e das condições operacionais, devendo ser calibrados em função dos valores de operação da taxa de descarga e *hold-up* de diversos moinhos industriais. H^* é a massa de referência, ou massa morta, introduzida a fim de garantir a adimensionalidade do modelo.

Seguindo esta linha de raciocínio, Carvalho e Tavares (2006) demonstraram a validade da aplicação da Equação 26 para um moinho de bolas operando em escala laboratorial com 52% de grau de enchimento e 115% de preenchimento de vazios. Eles concluíram que uma relação do tipo potência pode ser capaz de descrever adequadamente o transporte de sólidos no interior do moinho. Entretanto, os pesquisadores não estabeleceram uma relação entre as variáveis de projeto e operação do moinho com os parâmetros do modelo, além de trabalharem com um grau de enchimento pouco usual na operação de moinho de bolas.

Oliveira (2009) verificou a variação dos parâmetros da função taxa de descarga para diferentes condições operacionais. Apesar de demonstrar que algumas condições operacionais afetaram mais os parâmetros que outras, também não foi estabelecida uma relação entre os parâmetros da função e as condições operacionais.

A fim de entender melhor o transporte de partícula através do moinho, Govender *et al.* (2010) aplicaram a técnica do PEPT (*Positron-Emission-Particle-Tracking*) a moinhos tubulares. A técnica permite a observação não invasiva dos moinhos sob condições operacionais empregando partículas marcadas com emissores β^+ . Utilizando a mesma técnica, Sichelwe *et al.* (2010) propuseram um modelo de transporte de massa para moinhos tubulares rotativos baseado no escoamento de fluidos em meios porosos. Os autores modelaram a porosidade da carga do moinho em função das condições operacionais e geométricas do moinho, propondo relações entre a distribuição de porosidade e parâmetros de funcionamento do moinho.

Num trabalho recente, Nomura (2012) propôs um modelo capaz de prever o *hold-up* do moinho a partir da taxa de alimentação. Segundo o autor, o *hold-up* pode ser expresso pela equação:

$$H = \rho LAJ e_b U = \rho LA_h \quad (\text{Eq. 27})$$

na qual ρ é a densidade do material, L o comprimento do moinho, A área da seção transversal do moinho, J o fração de enchimento, U o preenchimento de vazios, e_b a altura da carga em repouso, e A_h área da seção transversal do *hold-up*. A Figura II-12 apresenta a área ocupada pelo *hold-up* (A_h), bem como a altura da carga (e_b).

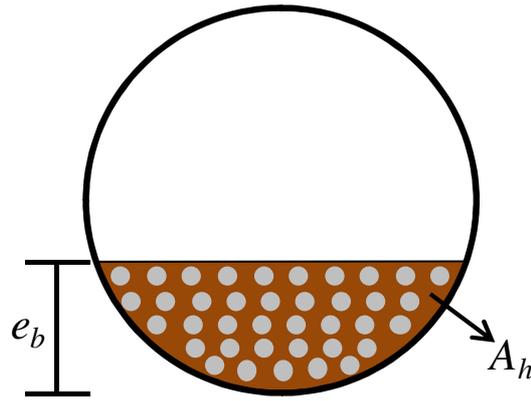


Figura II-12 – Representação da área transversal do moinho.

Diferentes tipos de arranjos de descarga possuem características diferentes. Essas propriedades podem ser representadas através da velocidade de descarga do material pelas aberturas (v) e pela fração de área aberta para a descarga (f_{op}). Pequenas variações na área de transversal do *hold-up* (A_h) resultaram em variações na taxa de alimentação (W), tal que:

$$dW = \rho v f_{op} dA_h \quad (\text{Eq. 28})$$

Combinando as Equações 26 e 27, e considerando uma condição inicial de $H = H_0$, sendo a massa de material retida no moinho para taxa de alimentação igual a zero, é possível montar a equação:

$$H = \left(\frac{L}{v f_{op}} \right) W + H_0 = k_1 W + H_0 \quad (\text{Eq. 29})$$

na qual k_1 é uma constante que expressa as propriedades de descarga na saída do moinho. A relação linear entre o *hold-up* e a taxa de alimentação só será válida quando v e f_{op} puderem ser presumidas constantes em qualquer parte da área transversal da

efetiva descarga do equipamento. Segundo Nomura, este modelo é capaz de prever o *hold-up* do moinho para qualquer tipo de operação, úmido ou seco, e para qualquer tipo de diafragma, caso exista.

II.5.1.2 Distribuição do Tempo de Residência (DTR)

A utilização de modelos de parâmetros concentrados não apresenta a posição da partícula no equipamento como variável independente. Todas as informações a respeito da distribuição espacial das propriedades do material no moinho são perdidas e devem ser introduzidas mediante equações adicionais que descrevem o movimento das diversas partículas que constituem a carga do moinho. Têm-se demonstrado na prática que o conhecimento estatístico dos tempos de permanência das partículas no moinho é suficiente para completar o modelo de moagem contínua. O parâmetro representativo é o tempo de residência das partículas no moinho (Austin e Concha, 1993).

Na verdade, as partículas que constituem o fluxo tomam diferentes caminhos dentro do moinho, desde a entrada até a descarga. Algumas partículas demandam mais tempo que outras para percorrer todo o moinho. Logo, não seria prático avaliar o tempo de residência de uma partícula, mas sim da população de partículas, sendo os tempos de residência apresentados na forma distribuída, descrevendo o movimento dessas através de uma função de distribuição do tempo de residência (Oliveira, 2009).

Do ponto de vista teórico, a função de distribuição dos tempos de residência (DTR) pode ser deduzida por meio de equações que descrevem a transferência de massa em moinhos de bolas, conforme revisado em II.5.1.1, sendo essas associadas ao transporte de material desde a entrada até a descarga do equipamento. Infelizmente, os estudos de

transporte de massa do moinho não avançaram a ponto de fornecer informações suficientes para sua previsão. Por esta razão, é necessário obter informações de distribuição de tempo de residência com o auxílio de experimentos (Austin e Concha, 1993; Oliveira, 2009).

O conceito de distribuição de tempos de residência foi originalmente proposto por Danckwerts em um artigo pioneiro (Danckwerts, 1953). Com o passar dos anos a técnica de determinação da distribuição do tempo de residência tem sido empregada com sucesso na caracterização do transporte de material em vários processos industriais. A resposta do traçador é o método popularmente usado para estudos de DTR (Makokha e Moys, 2010).

Normalmente, a medição da DTR envolve a introdução de um traçador na alimentação e, continuamente ou discretamente, o monitoramento da descarga, em termos de concentração ou condutividade. Se o traçador for injetado como um pulso, então a fração que permanece no equipamento (presumindo que o fluxo através do moinho se mantenha constante) pode ser descrita pela função distribuição $E(t)$ matematicamente expressa por (Makokha e Moys, 2010):

$$E(t) = \frac{C(t)}{\int_0^{\infty} C(t)dt} \quad (\text{Eq. 30})$$

na qual $C(t)$ representa a concentração de traçador no fluxo de descarga, enquanto que a integral de $C(t)dt$ define o somatório acumulado do traçador ao longo do tempo. O principal objetivo da medida experimental da DTR é fornecer subsídios para o ajuste dos parâmetros de modelos idealizados de mistura para o equipamento em questão.

Diferentes modelos têm sido utilizados para descrever a mistura em moinhos industriais (Austin *et al.*, 1984; Hogg, 1984; Songfack e Rajamani, 1999; Makokha e Moys, 2011), sendo o modelo de mistura perfeito o mais usado na descrição de moinhos. Adicionando um traçador, com um balanço de massas deste em torno do volume de controle, é possível demonstrar que a função DTR, no estado estacionário, para o reator de mistura perfeita é dada por (King, 1991),

$$\bar{E}(s) = \frac{\bar{C}_{sai}(s)}{\bar{C}_{ent}(s)} = \frac{1}{(1 - s\theta)} \quad (\text{Eq. 31})$$

sendo θ o tempo de residência médio do misturador perfeito, \bar{C}_{sai} a concentração do traçador na saída do reator, \bar{C}_{ent} a concentração do traçador na entrada do reator. Aplicando a Transformada de Laplace, a função DTR para um misturador perfeito será:

$$E(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (\text{Eq. 32})$$

Para dois misturadores de tamanhos distintos ligados em série, a função DTR é dada por

$$E(t) = \frac{\left(\exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\theta_2}\right) \right)}{(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{Eq. 33})$$

Para a combinação de três misturadores com tamanhos distintos (para os quais $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$) ligados em série, a DTR é,

$$E(t) = \frac{\theta_1(\theta_2 - \theta_3)\exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right) + \theta_3(\theta_1 - \theta_2)\exp\left(-\frac{t}{\theta_3}\right) + \theta_2(\theta_3 - \theta_1)\exp\left(-\frac{t}{\theta_2}\right)}{(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3)} \quad (\text{Eq. 34})$$

Existem ainda os chamados modelos de dispersão, que têm sido amplamente usados para caracterizar e representar fluxos de materiais através de equipamentos cilíndricos rotacionais, tais como moinhos de bolas e fornos rotativos (Concha e Austin, 1993). A simplificação mais frequentemente usada na equação da dispersão é o modelo de dispersão axial, no qual qualquer mistura no plano radial é considerada como sendo instantânea. Tendo em vista que, no presente trabalho, a moagem é realizada a seco e que, neste modelo, há variação na quantidade de massa de material que flui pelo moinho, o transporte pode ser descrito pela equação de difusão, cuja solução é dada por (King, 1992):

$$E(t) = \left(\frac{Pe \theta}{4 \pi t^3} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{Pe}{4 t} \left(\frac{t - \theta}{\theta} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq. 35})$$

sendo $Pe = u L / D_x$ o número de Peclet, L o comprimento do moinho, θ o tempo médio de residência, u é a velocidade média do material no interior do moinho e D_x é o coeficiente de mistura axial. Este modelo pode ser considerado como uma boa aproximação no caso do moinho de bolas, uma vez que a ação de turbilhonamento dentro do equipamento faz com que o tempo de difusão transversal seja muito pequeno quando comparado com o tempo de residência das partículas.

II.5.1.3 Função Classificação Interna

Um das partes que integram o moinho, e que influenciam o seu desempenho, é o diafragma interno (Figura II-13). Ele é usado para separar câmaras adjacentes de moagem, prevenindo a passagem de partículas maiores e controlando o tamanho

máximo de material passante, bem como controlar a descarga do produto final da moagem (Özer *et al.*, 2006).

Mesmo na ausência de um retentor físico como um diafragma, qualquer tipo de transporte dependente do tamanho de partícula, no qual as partículas se movem pelo moinho com diferentes taxas, invariavelmente conduz a um efeito de classificação interna (Hogg, 1984).

Conforme as partículas percorrem o equipamento, elas estarão sujeitas a mecanismos ou fenômenos que prejudicam a movimentação axial de partículas maiores. Assim, a classificação interna de um equipamento será aquela em que as partículas sofreram uma separação por tamanhos, tal que partículas finas serão descarregadas com maior probabilidade que as grossas, de maneira análoga a um processo de peneiramento. A classificação interna ocorre principalmente nos moinhos com descarga de diafragma, com aspiração a ar e com descarga de *overflow* (moagem a úmido) (Hogg, 1984).

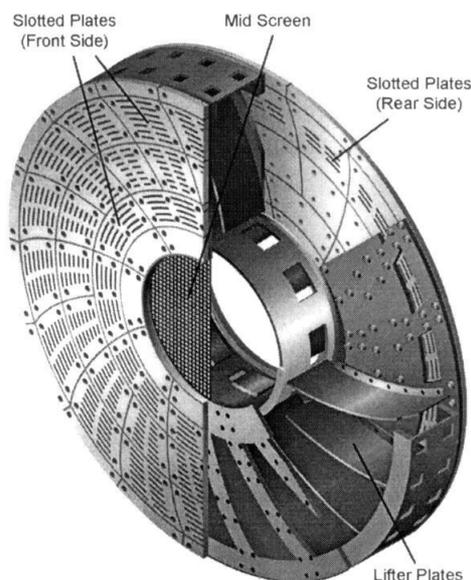


Figura II-13 – Diafragma de dupla parede (Özer *et al.*, 2006 – cópia autorizada para publicação).

A operação de um diafragma é afetada por vários fatores que incluem forma, posição, altura das aberturas, superfície livre e o mecanismo de transporte de material. O diafragma de descarga dos moinhos, tanto os que operam a úmido quanto a seco, fornece a seletividade de tamanhos de partículas do *hold-up* e tem sido interesse de estudo de alguns pesquisadores há anos (Özer *et al.*, 2006).

Em um moinho com descarga de diafragma, Mori e colaboradores (Mori *et al.*, 1967) estudaram o efeito da porcentagem de área aberta da grelha sobre o *hold-up* de sólidos secos, e concluíram que a porcentagem de área aberta exerce apenas um efeito limitado sobre o *hold-up*. Um modelo para o fluxo de sólidos secos através da grelha de descarga foi desenvolvido por Wood (1980). Ele observou que a taxa de descarga é mais fortemente influenciada pelo preenchimento de vazios da região próxima à grelha do que pelo *hold-up* médio, e que a grelha pode atuar como um classificador para partículas grandes e de tamanhos próximos, afetando a granulometria do material no interior do moinho (Özer *et al.*, 2006).

A classificação que ocorre na grelha pode ser expressa matematicamente como aquela que ocorre em um classificador aerodinâmico a seco, expresso matematicamente usando modelo de curva de partição de Whiten (Napier-Munn *et al.*, 1996):

$$E_c = Mc \left(\frac{(1 + \beta' x_i \beta^*) (\exp(\alpha') - 1)}{\exp(\alpha' x_i \beta^*) + \exp(\alpha') - 2} \right) \quad (\text{Eq. 36})$$

na qual E_c é a fração da alimentação reportado ao material fino (partição real), Mc material realmente classificado (1 - fração passante), α' parâmetro de severidade da redução de eficiência da curva, β' parâmetro de *fish-hook* da redução de eficiência da

curva, β^* parâmetro que preserva a definição do parâmetro d_{50c} (quando $E_d = C/2$, $d = d_{50c}$), x tamanho de partícula normalizado (d/d_{50c}) e d_{50c} tamanho de corte corrigido.

II.5.2 Modelo do Moinho de Bolas em Batelada

Quando o moinho é utilizado na condição descontínua ou de batelada, uma quantidade de massa é colocada na câmara de moagem para processamento sem que haja entrada ou saída de material. Considerando que a massa de material irá permanecer no moinho sempre bem misturado, e utilizando a Equação 26, pode-se determinar a granulometria do produto de um moinho em batelada pela equação:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -s_i p_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j p_j(t) \quad (\text{Eq. 37})$$

A partir da descrição estocástica, o MBP permite levar em conta os microprocessos que ocorrem no interior de um equipamento de redução de tamanho de partícula, e descrevê-los matematicamente via retro-cálculo. O retro-cálculo, como o próprio nome indica, é uma metodologia de estimação de parâmetros do processo a partir dos resultados experimentais das análises granulométricas das correntes do circuito (Carvalho, 2009).

II.5.3 Modelo do Moinho de Bolas Contínuo

A modelagem matemática de qualquer fenômeno físico necessita da adoção de hipóteses de simplificação. O grau de representatividade do modelo está diretamente

relacionado a hipóteses mais gerais e que impõem pouca restrição à aplicação do modelo. No presente trabalho, no caso do moinho de bolas são adotadas as seguintes hipóteses:

- A variável “tamanho de partícula” é descrita de forma discretizada;
- A taxa de quebra de partícula pode ser adequadamente descrita considerando cinética de primeira ordem, sendo influenciada pelas condições operacionais, conforme proposto por Austin (Austin *et al.*, 1984), mas invariável com o tempo;
- A classificação interna não será considerada no modelo devido ao seu efeito ser mais significativo para moinhos industriais, cuja alimentação apresenta granulometria mais grossa que a abertura dos orifícios de descarga de material, e para moinhos com sucção de ar (“*air sweeping*”), podendo apresentar um efeito marginal no caso de moinhos de pequeno porte (piloto e laboratorial).

A partir de uma aproximação compatível da equação geral do modelo do balanço populacional discretizado em classes de tamanhos, e considerando que a operação esteja ocorrendo em estado estacionário ($W_{in} = W_{out} = W$), chega-se à seguinte equação:

$$p_{out,i}(t) = p_{in,i}(t) - s_i(t) p_i(t) \frac{H}{W} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j(t) \frac{H}{W} \right) \quad (\text{Eq. 38})$$

sendo $H/W = \theta$, ou seja, o tempo médio de residência encontrado experimentalmente. Esta equação pode ser resolvida recursivamente e sequencialmente, utilizando um código de Matlab[®], escrito para esse propósito.

III. METODOLOGIA

III.1 Materiais

Os materiais usados nos ensaios de moagem foram uma amostra minério de ferro Itabirítico, proveniente do Quadrilátero Ferrífero (Minas Gerais), e uma amostra de Catalisador de Equilíbrio. O Catalisador de Equilíbrio – Ecat (*Equilibrium catalyst*) – é a denominação do produto gerado a partir do catalisador zeolítico após a exaustão da sua atividade no processo de refino de petróleo. O Ecat também é denominado, na literatura, como FC3R (*Fluid Catalytic Cracking Catalyst Residue*), sendo um composto à base de sílica-alumina inorgânica, similar à de algumas cinzas volantes e do metacaulim (Faria, 2012). Segundo Faria (2012), o Ecat possui a composição química básica apresentada na Tabela III-1, proveniente da FÁBRICA CARIOCA DE CATALISADORES S.A., principal fornecedor de catalisador para a PETROBRAS S.A. e principal responsável pelo recolhimento e destinação do Ecat.

Tabela III-1 - Composição Química Básica (% em peso) do Ecat (Faria, 2012)

SiO ₂	Al ₂ O ₃	V	Terras-Raras	Ni	Fe	Cu	C	Sb
25,0	25,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
a	a	a	a	a	a	a	a	a
60,0	55,0	10,0	2,0	1,5	0,1	0,1	0,01	0,03

As massas específicas dos materiais usados foram determinadas por picnometria a hélio, obtendo-se o valor de 3,64 para o minério de ferro e 2,47 g/cm³ para o Ecat. Os teores de umidade de ambos os materiais medidos foram inferiores a 0,2% em massa.

As análises granulométricas deste trabalho foram determinadas por espalhamento (difração) laser utilizando o equipamento Mastersizer 2000 (Malvern InstrumentsTM), instalado no Laboratório de Estruturas do PEC/COPPE. As distribuições

granulométricas de ambos materiais apresentaram mais que 80% do material menor que 200 μm (Figura III-1).

Os materiais escolhidos possuem características reológicas granulares distintas, o que está diretamente relacionado com a suscetibilidade ao escoamento das partículas (Figura III-2). Através do teste de ângulo de repouso, foi possível quantificar a capacidade de escoamento dos materiais, no qual o Ecat apresenta um ângulo de repouso médio de $18,6^\circ \pm 1,1^\circ$ e o minério de ferro um ângulo de $31,6^\circ \pm 2,4^\circ$.

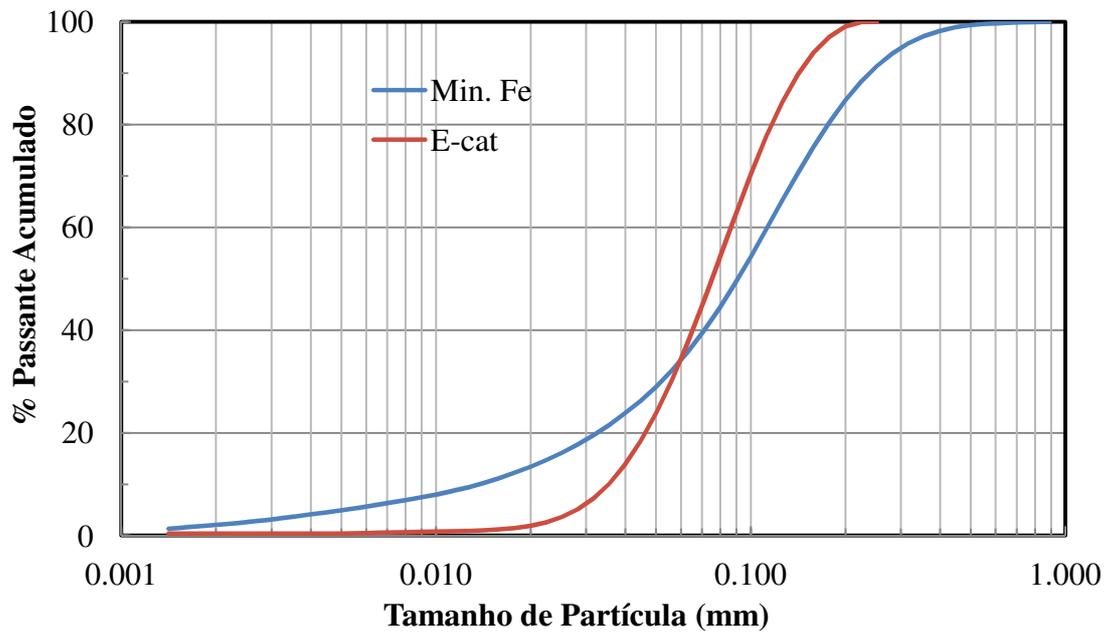


Figura III-1 – Distribuições granulométricas dos materiais ensaiados.

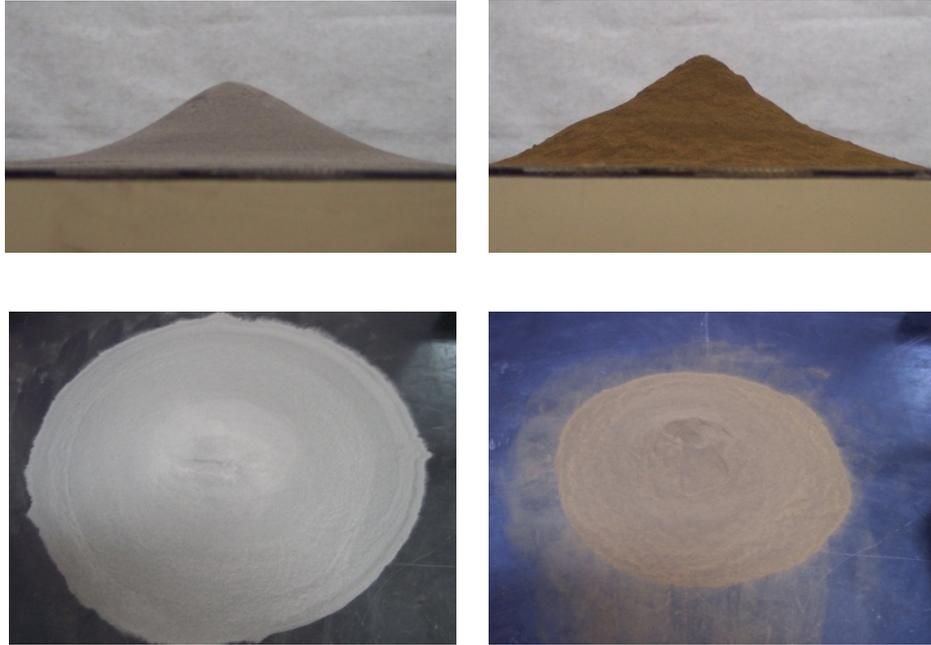


Figura III-2 – Teste de medida de ângulo de repouso: Ecat (à esquerda) e minério de ferro (à direita).

III.2 Equipamento de Estudo

O circuito de moagem (Figura III-3) é composto por um alimentador helicoidal (Vibrascrew Inc.) acoplado a um moinho de bolas contínuo (Cimaq Ltda.), sendo o produto da moagem descarregado em uma balança para controle da taxa de descarga e massa de produto gerado.

O circuito de moagem, instalado no Laboratório de Tecnologia Mineral (LTM/COPPE/UFRJ), possui um sistema supervisor (Figura III-4), programado na plataforma LabVIEW[®], capaz de monitorar as variáveis mais importantes do processo (Kallembach, 2012).

O alimentador é composto de um silo de armazenagem posicionado sobre uma célula de carga (peso máximo de 10 kg e precisão de 20 g), um painel de comando, um motor para produzir a vibração e um motor associado a um eixo helicoidal para a descarga de material. Kallembach (2012) desenvolveu um programa de computador para controlar a taxa de descarga do silo, ou seja, a taxa de alimentação do moinho, reduzindo a

oscilação da taxa, perturbações e garantindo um tempo de estabilização adequado. O alimentador pode operar na faixa de taxas de alimentação de 21 a 400 cm³/min.

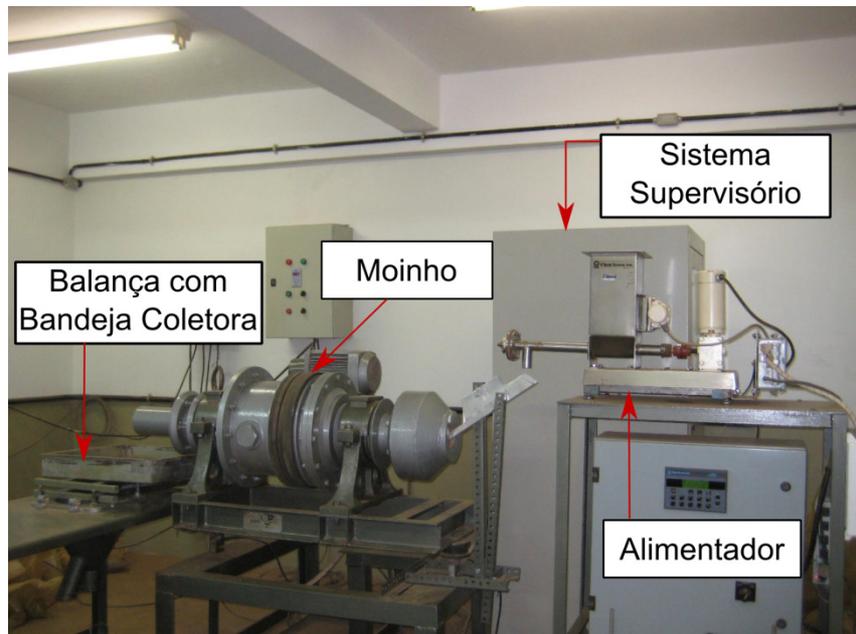


Figura III-3 – Representação esquemática do arranjo adotado



Figura III-4 – Tela do sistema supervisório

O moinho de bolas contínuo possui uma única câmara de moagem (Figura III-5), cujas dimensões são: 31,8 cm de diâmetro e 30,7 cm de comprimento. O conjunto moinho-motor está posicionado sobre três células de carga, que permitem a medição em tempo

real da massa de *hold-up* durante os experimentos, cujo peso máximo é de 400 kg com precisão de 30 gramas.

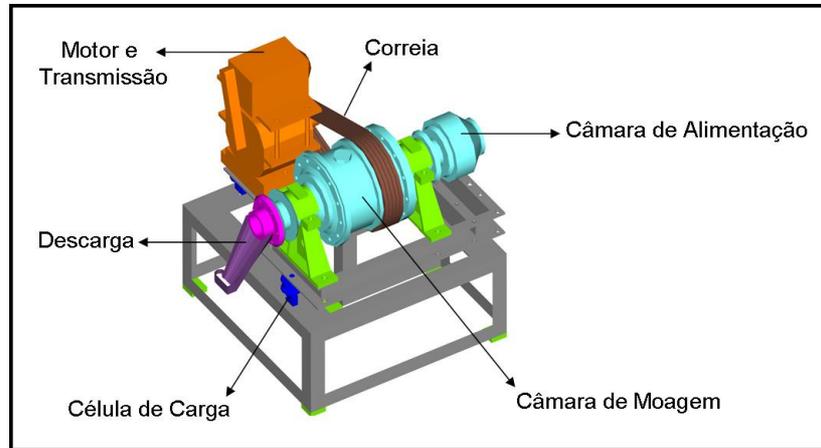


Figura III-5 – Desenho em CAD do moinho de bolas contínuo.

A descarga do material ocorre através de um diafragma, mostrado em detalhe na Figura III-6. O diafragma possui aberturas de 7 mm de diâmetro distribuídas axialmente, as quais representam 8% da área total do diafragma. A Figura III-6 apresenta ainda o perfil da câmara de moagem constituída de 12 barras elevadores. O transporte de massa para o interior e exterior da câmara de moagem ocorre por meio de um tubo que contém uma rosca cobrindo a sua superfície interna, como mostra a Figura III-7. Ao sair do moinho, o material já moído é depositado sobre uma balança (peso máximo de 100 kg com precisão de 15 g) ligada ao sistema supervisorío, a qual permite determinar a massa do produto ao longo do tempo e taxa de descarga do moinho.

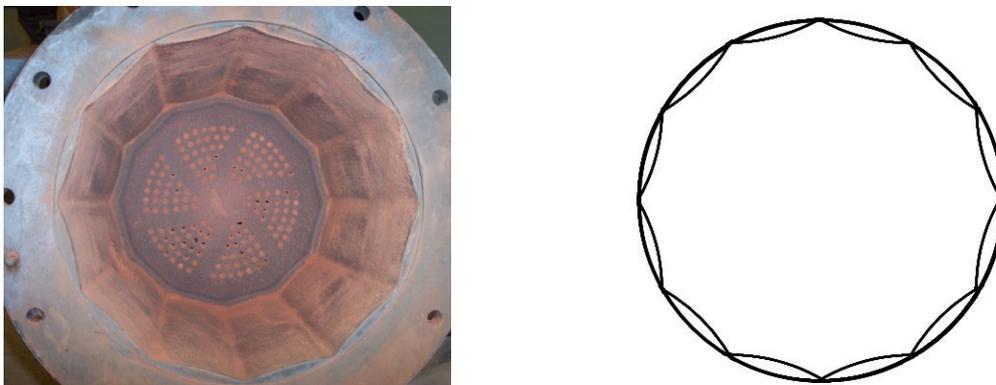


Figura III-6 – Vista interna e perfil da câmara de moagem.

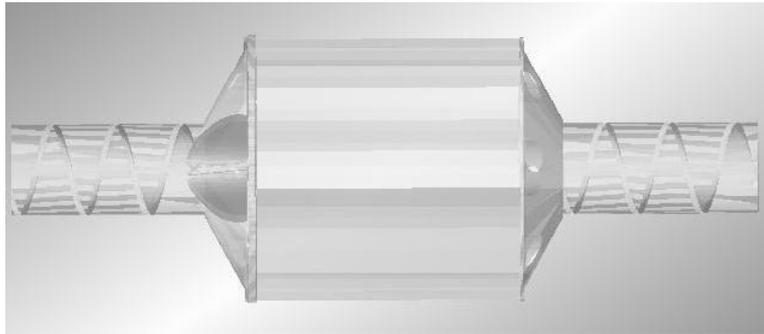


Figura III-7 – Detalhe da rosca de alimentação (direita) e descarga (esquerda) do moinho.

III.3 Procedimento Experimental

III.3.1 Ensaio de DTR

O ensaio para determinar a DTR do moinho foi realizado como parte de um trabalho anterior (Oliveira, 2009). O material usado para este ensaio foi uma mistura de duas rochas (50% gnaiss e 50% granulito), provenientes da Embu Mineração e Comércio Ltda. (Embu – SP) e Pedra Sul Mineração Ltda. (Mathias Barbosa – MG), respectivamente. Ambas as rochas se caracterizam por possuir uma grande homogeneidade em sua composição e por suas massas específicas semelhantes (aproximadamente $2,79 \text{ g/cm}^3$) (Neves, 2005). A distribuição granulométrica da alimentação apresentou 80% passante no tamanho de 0,757 mm e 27% do material com tamanho menor que 100 μm .

A função distribuição de tempos de residência foi determinada mediante a adição de pó de zinco (99,9%, Merck®). A escolha do zinco foi devido ao fato que esse elemento não foi detectado na análise química do material alimentado, conforme mostra outra publicação (Neves, 2005).

O experimento foi realizado com o moinho operando em circuito aberto em regime estacionário com 28% de enchimento de bolas de aço de 25 mm, girando a 75% da velocidade crítica, correspondendo a 58,67 rpm. À alimentação, introduzida a uma taxa média de 6,9 kg/h, foram adicionados no total 120 g de pó de zinco, sendo 30 gramas a

cada 15 segundos. Em paralelo à adição do traçador, iniciou-se a amostragem da descarga, retirando-se a totalidade do produto descarregado a cada um minuto durante o período de duas horas. A medição do teor de zinco das amostras coletadas e, em seguida, quarteadas, foi realizada por meio de fluorescência de raio-X (Shimadzu EDX – 720).

Embora tenha sido realizado com um material distinto aos ensaiados no presente trabalho, considera-se que o resultado do ensaio permite identificar o modo predominante de transporte no interior do moinho, que foi o mesmo usado no presente estudo.

III.3.2 Moagem Descontínua

No presente trabalho, o moinho adotado para realizar este ensaio é o mesmo utilizado na moagem contínua, eliminando assim qualquer influência do perfil interno da câmara de moagem e das dimensões do moinho. Para tal aplicação, foi necessário obstruir todos os orifícios presentes no diafragma do moinho, de maneira a impedir a saída de qualquer partícula da câmara de moagem, como pode ser visto na Figura III-8.



Figura III-8 – Vista do diafragma antes (à esquerda) e depois (à direita) do ensaio de moagem descontínua.

O ensaio constituiu-se na moagem de amostras em tempos variados, seguida de análises granulométricas do material moído para cada tempo ensaiado. Os tempos adotados, tanto para o Ecat quanto o minério de ferro, foram 7, 15 e 30 minutos, sendo as

condições operacionais apresentadas na Tabela III-2. A fim de limitar a influência do tamanho dos corpos moedores sobre o tipo de moagem, contínuo ou descontínuo, foi adotado o mesmo tamanho de corpos moedores para ambos modos moagem, correspondendo a esferas de aço de 16 mm de diâmetro.

Tabela III-2 - Condições operacionais ensaiadas em moagem descontínua

Materiais	Ecat	Minério de Ferro
Grau de enchimento - J	0,30	0,30
Massa de bolas (kg)	31,28	31,28
Fração da Velocidade Crítica – φ_c	0,76	0,75
Frequência de rotações (rpm)	59,45	58,67
Massa Ensiada (kg) - H	1,86	6,11
Preenchimento de vazios - U	0,46	1,04

III.3.3 Moagem Contínua

Os ensaios de moagem contínua foram realizados para diferentes condições operacionais (Tabela III-3), na intenção de abordar algumas condições usuais na indústria mineral.

O procedimento experimental, para todos os ensaios, consistiu em alcançar apenas o regime estacionário, sendo desligado em seguida o circuito de moagem. Por uma questão de repetibilidade definiu-se que o regime estacionário corresponderia ao caso em que a taxa de descarga atinge valores dentro de um intervalo de $\pm 7\%$ da taxa de alimentação ($W_{out} = W_{in} \pm 0,07 W_{in}$), sendo esta última mantida constante desde o início do experimento, como demonstrado na Figura III-9.

Como qualquer outro equipamento contínuo, o moinho pode mudar seu regime de trabalho de acordo com as perturbações externas. Para garantir que isso não ocorresse, o experimento só seria considerado válido se conseguisse manter aquele estado durante, pelo menos, 20 minutos. Ao longo desse período, amostras do produto eram retiradas,

identificas e armazenadas para que, posteriormente, fossem determinadas suas distribuições granulométricas com o auxílio do analisador de tamanho de partícula por espalhamento a laser (Mastersizer 2000[®], Malvern InstrumentsTM).

Tabela III-3 - Condições operacionais do moinho para os experimentos realizados

	Ecat			
Grau de enchimento - J	0,20	0,20	0,30	0,30
Massa de Bolas (kg)	20,85	20,85	31,28	31,28
Fração da Vel. Crítica - ϕ_c	0,30	0,75	0,30	0,75
Frequência de Rotação (rpm)	23,47	58,67	23,47	58,67
Taxa de Alimentação (cm ³ /min)	40 / 81 / 109	40 / 81 / 109	40 / 81 / 109	40 / 81 / 109
	Minério de Ferro			
Grau de enchimento - J	0,20	0,20	0,30	0,30
Massa de Bolas (kg)	20,85	20,85	31,28	31,28
Fração da Vel. Crítica - ϕ_c	0,30	0,75	0,30	0,75
Frequência de Rotação (rpm)	23,47	58,67	23,47	58,67
Taxa de Alimentação (cm ³ /min)	41 / 82 / 113	41 / 82 / 113	41 / 82 / 113	41 / 82

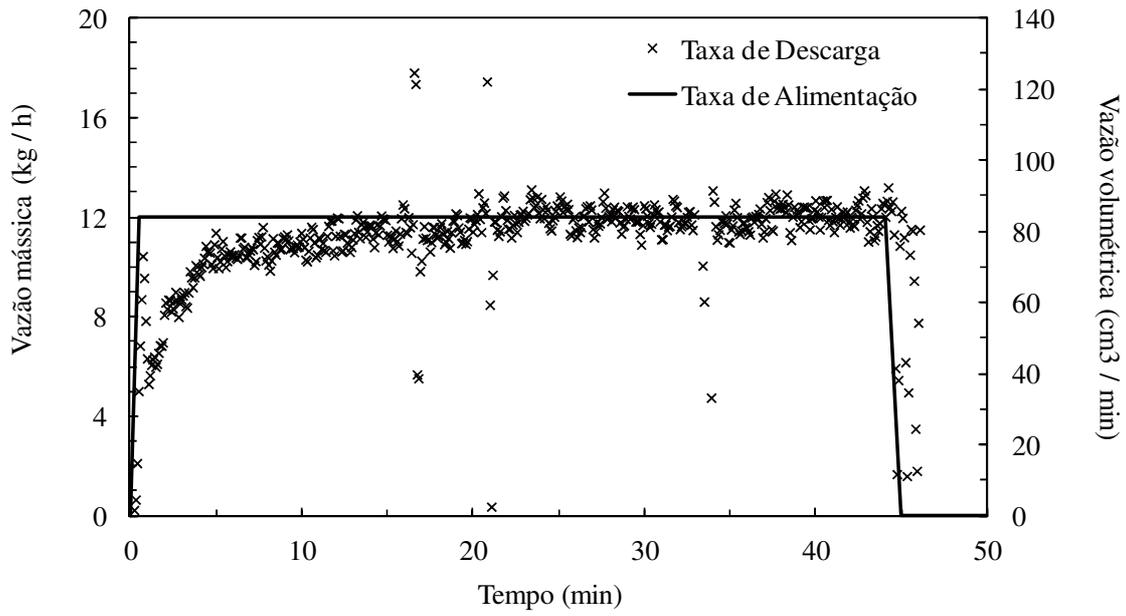


Figura III-9 – Identificação do regime estacionário durante um experimento com E-cat, empregando 30% de enchimento e 30% da velocidade crítica.

IV. RESULTADOS

IV.1 Modelagem da DTR

A variação do *hold-up* ao longo do tempo em um ensaio é ilustrada na Figura IV-1, que também mostra a vazão instantânea de descarga W , calculada a partir das amostras coletadas do produto. A figura mostra que o *hold-up* do moinho, durante o ensaio de medida da distribuição do tempo de residência (DTR), se manteve aproximadamente constante em 3,88 kg. Pela razão entre a massa média de *hold-up* e a taxa média de descarga (6,86 kg/h), estima-se que o tempo médio de residência dos sólidos no moinho foi igual a 33,9 minutos.

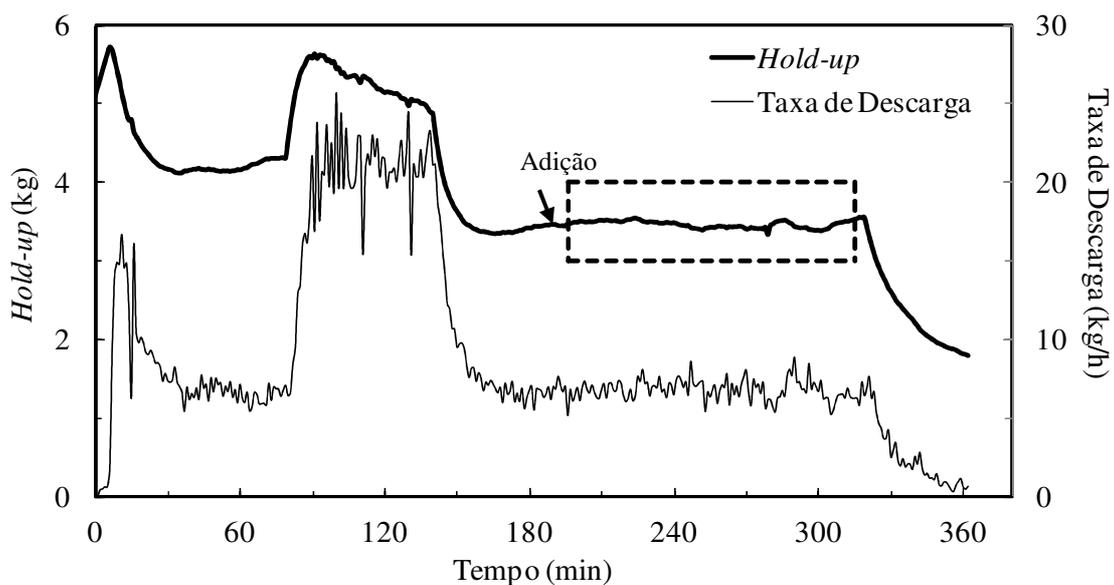


Figura IV-1 – Variação do *hold-up* do moinho no ensaio e da taxa de descarga do produto.

A Figura IV-2 sintetiza as medida de concentração (teores) de zinco das amostras realizadas por fluorescência de raios-X. Tendo em vista o tempo relativamente prolongado de coleta de cada uma das amostras (1 minuto), bem como as perturbações na taxa de alimentação e no *hold-up* do moinho (Figura IV-1), calculou-se a massa

cumulativa de traçador M contida na descarga do moinho (Figura IV-2) após um tempo t_j do início da injeção do traçador, sendo estimada por

$$M(t_j) = \sum_{i=1}^j C(t_i)Q(t_i)\Delta t \quad (\text{Eq. 39})$$

Oliveira (2009) considerou que a introdução do traçador no ensaio foi um pulso instantâneo. Entretanto, tendo em vista a grande quantidade de traçador adicionada (120 g) e o relativamente longo tempo de introdução (1 minuto), não era rigorosamente correto presumir, para fins de ajuste da função de DTR, que a alimentação teria ocorrido na forma de um pulso instantâneo. Assim, não seria correto considerar que o pulso de alimentação fosse representado por uma função do tipo delta Dirac ($\delta(t)$) e que a concentração normalizada de traçador na descarga seria equivalente à função DTR (Equação 30).

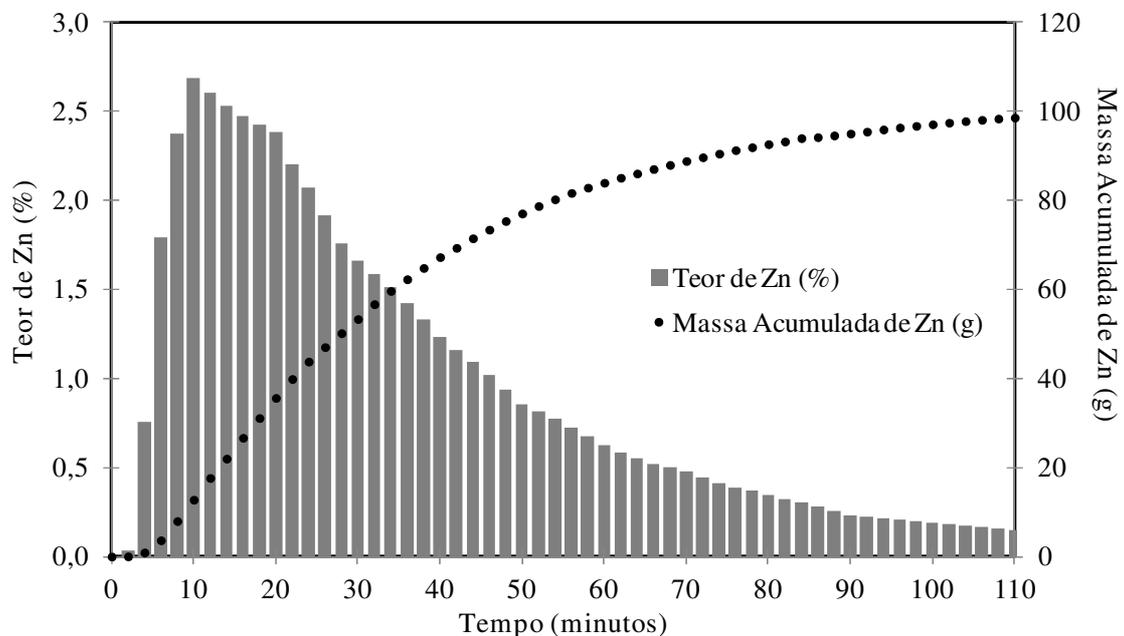


Figura IV-2 – Teor e massa acumulada de Zn contidos na descarga do moinho em função do tempo.

O balanço de massa do traçador em um reator qualquer é dado por:

$$\int_0^{\infty} W_{out}(t)C_{out}(t)dt = \int_0^{\infty} W_{in}(t)C_{in}(t)dt \quad (\text{Eq. 40})$$

sendo W a vazão mássica de alimentação e descarga do moinho, C_{in} a massa de traçador na alimentação, C_{out} a concentração do traçador na descarga do reator. Se considerado que a introdução do traçador é representada como uma sucessão de pulsos muito curtos, então tem-se

$$W_{out}(t)C_{out}(t) = \int_0^t W_{in}(t')C_{in}(t')E(t-t')dt' = \hat{m}(t) \quad (\text{Eq. 41})$$

sendo que $W_{in}(t)C_{in}(t)$ e $W_{out}(t)C_{out}(t)$ são as massas instantâneas de traçador na alimentação e na descarga do reator, iguais a $m_{in}(t)$ e $\hat{m}(t)$, respectivamente. A massa cumulativa estimada de traçador coletada na descarga do reator $\hat{M}(t)$ pode ser calculada por integração da Equação 41:

$$\hat{M}(t) = \int_0^t \int_0^{t'} m_{in}(t')E(t-t')dt' dt \quad (\text{Eq. 42})$$

Se a injeção do traçador pode ser representada como a soma de n pulsos instantâneos iguais, reconhecendo que a distribuição cumulativa de tempos de residência é dada por

$$F(t) = \int_0^t E(t)dt \quad (\text{Eq. 43})$$

então a Equação 42 se torna simplesmente

$$\widehat{M}(t) = \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n F(t - t_i) \quad (\text{Eq. 44})$$

A introdução do traçador foi realizada em quatro pulsos de 30 g, em intervalos de 15 segundos, de maneira que $n = 4$ e $t_1 = 0$ min, $t_2 = 0,25$ min, $t_3 = 0,50$ min e $t_4 = 0,75$ min.

A determinação dos parâmetros ótimos das funções DTR foi realizada pela minimização da função objetivo, que compara as massas cumulativas de traçador na descarga, medidas usando a Equação 44, sendo a soma quadrática (SQ) dada por

$$SQ = \sum_{j=1}^m \left(M(t_j) - \frac{M}{4} \sum_{i=1}^4 F(t_j - t_i) \right)^2 \quad (\text{Eq. 45})$$

Embora M na Equação 45 represente a massa cumulativa de traçador adicionada, ela foi considerada um parâmetro de ajuste na equação, tendo em vista erros sistemáticos detectados nas análises dos teores de zinco por fluorescência de raios-X.

Comparações entre os resultados experimentais e os ajustados utilizando as diferentes funções de DTR são mostradas na Figura IV-3. A Tabela IV-1 resume os resultados do ajuste para os modelos de mistura perfeita e do modelo de reator de dispersão axial.

Tabela IV-1 - Parâmetros ótimos dos modelos de mistura perfeita e de dispersão axial

Padrão de Mistura	θ_1 (min)	θ_2 (min)	θ_3 (min)	θ_{total} (min)	M (g)	SQ
Um misturador	49,7	-	-	49,7	111,4	1927,0
Dois misturadores	7,2	28,9	-	36,1	101,3	24,6
Três misturadores	3,7	30,8	2,6	37,0	102,1	5,0
		θ (min)	u (cm/min)	D_x (cm ² /min)	M (g)	SQ
Dispersão axial		47,30	0,63	11,82	109,64	62,9

Observa-se que um único misturador perfeito não é capaz de descrever adequadamente os resultados obtidos. Isso é evidenciado tanto pelo pobre ajuste do modelo aos dados (Figura IV-3), quanto pela diferença entre o tempo médio de residência medido (33,9 min) e o estimado (49,7 min). Um melhor ajuste foi obtido com o modelo de mistura axial, embora ele tenha se mostrado incapaz de descrever adequadamente os resultados a tempos de residência curtos (Figura IV-3). Os melhores resultados foram obtidos com dois ou três reatores de mistura perfeita com tamanhos distintos.

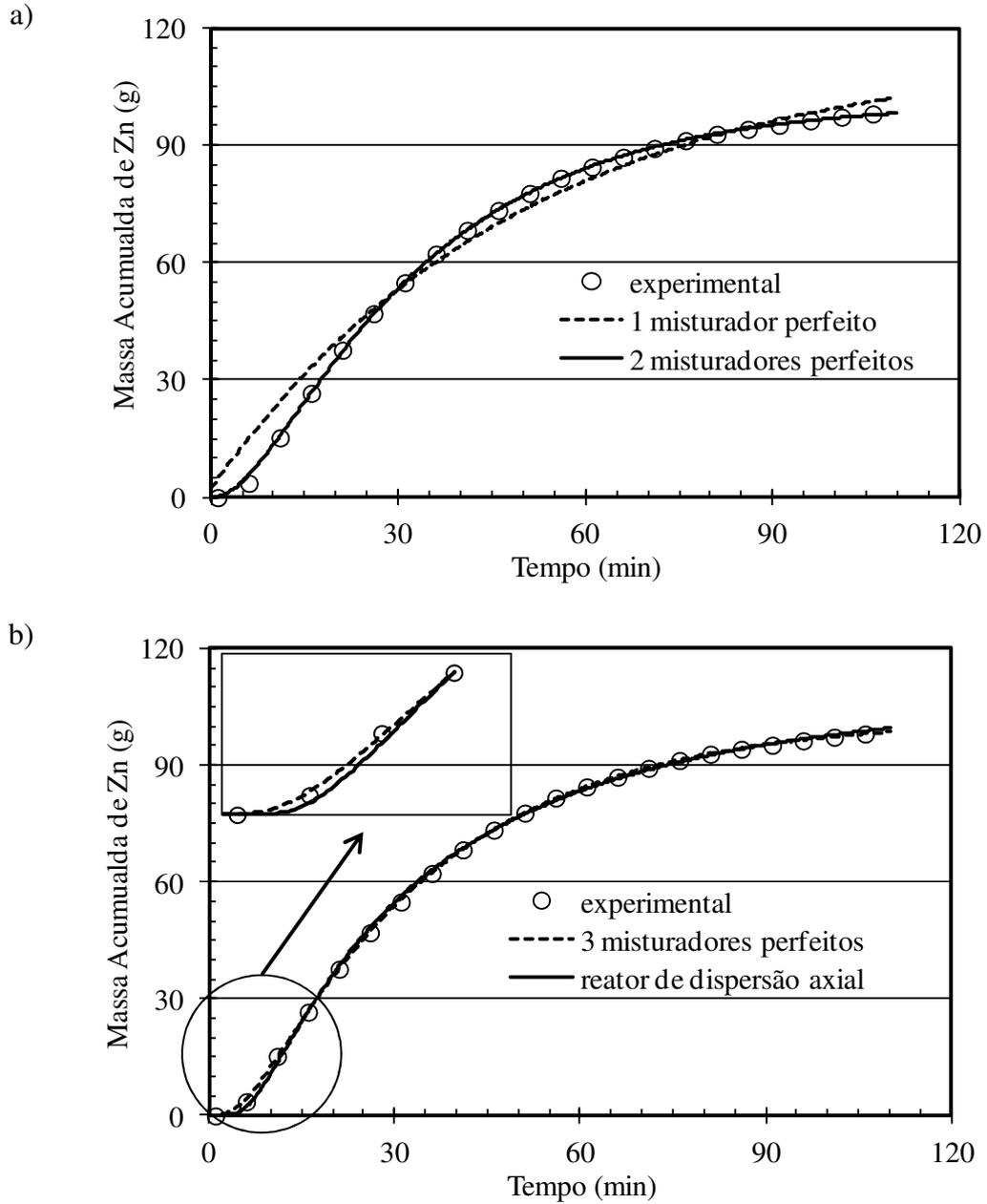


Figura IV-3 – Comparação entre os dados experimentais e as curvas simuladas com os parâmetros ótimos: a) 1 e 2 misturadores; b) 3 misturadores e reator de dispersão axial.

IV.2 Modelagem da Moagem Descontínua

Os ensaios de moagem descontínua realizados no moinho contínuo forneceram dados úteis para descrever a quebra imposta às partículas pelo equipamento, permitindo, por

meio de retrocálculo, a estimação dos parâmetros das funções quebra e seleção dos materiais de estudo. Uma rotina computacional desenvolvida em ambiente MATLAB[®], na qual é implementada a solução analítica proposta por Reid (1965) para resolver a Equação 37, é empregada na determinação dos parâmetros ótimos. A busca de parâmetros consiste em resolver a Equação 37 de forma a minimizar a função objetivo sugerida por Austin e Concha (1993) que, na forma modificada, é dada por:

$$SQ_b = \sum_z \sum_{i=1}^N (p_i^{\text{medido}} - p_i^{\text{calculado}})^2 \quad (\text{Eq. 46})$$

sendo z relativo aos intervalos de tempos ensaiados, i às classes de tamanhos das partículas e p_i as distribuições granulométricas medidas e calculadas. As Figuras IV-4 e IV-5 mostram a comparação entre os resultados experimentais e os ajustados.

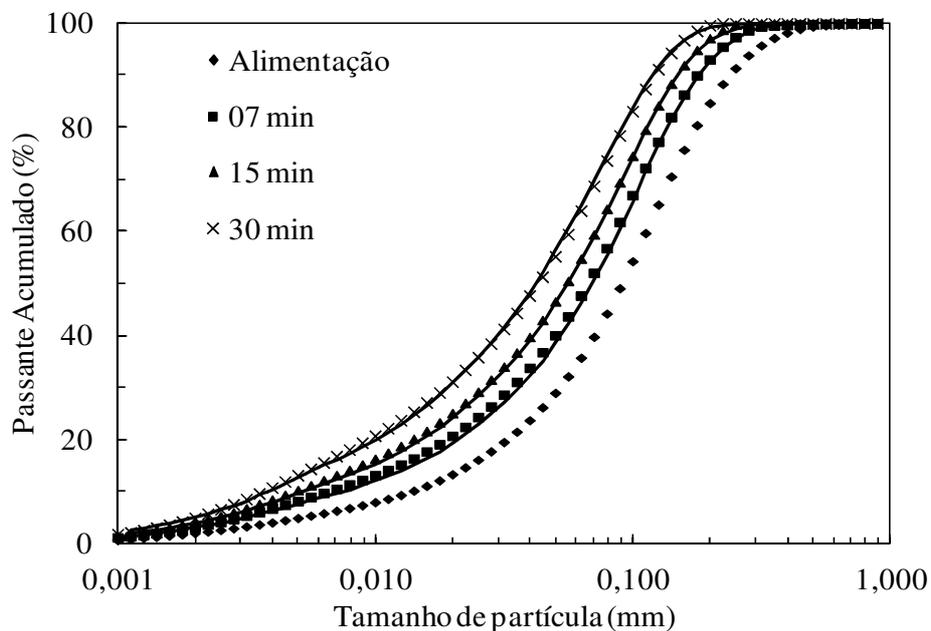


Figura IV-4 – Comparação entre as distribuições granulométricas medidas e calculas a partir da moagem em batelada do minério de ferro ($J = 0,30$, $U = 1,04$ e $\varphi_c = 0,75$): símbolos são dados experimentais e linhas representam o modelo ajustado.

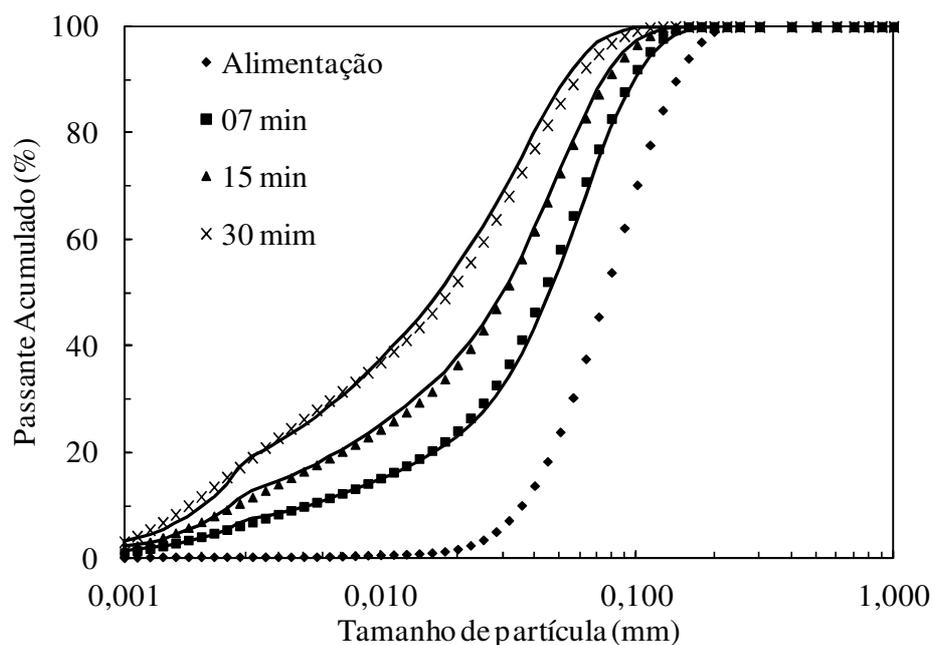


Figura IV-5 – Comparação entre as distribuições granulométricas medidas e calculas a partir da moagem em batelada do Ecat ($J = 0,30$, $U = 0,45$ e $\varphi_c = 0,76$): símbolos são dados experimentais e linhas representam o modelo ajustado.

A Tabela IV-2 mostra os parâmetros ótimos das funções quebra e seleção encontrados para o moinho contínuo operado em batelada.

Tabela IV-2 - Síntese das características de quebra dos materiais estudados

Amostras	Função seleção		Função Quebra			
	S_1 (min^{-1})	α	Φ	γ	ω	D^* (μm)
Itabirito	2,95	1,90	1,00	0,56	0,49	5,30
Ecat	11,27	1,66	1,00	0,60	1,11	2,96

IV.3 Modelagem da Moagem Contínua

IV.3.1 Resultados Experimentais

O modelo do balanço populacional não é capaz de descrever o efeito do transporte na granulometria do produto somente a partir dos parâmetros cinéticos obtidos no ensaio em batelada, bem como a função quebra. Assim, experimentos foram realizados com o objetivo de estimar a quantidade de material sólido retido no moinho em regime estacionário para os materiais de estudo e nas diferentes condições operacionais, conforme descrito no Capítulo III.

As Figuras IV-6 e IV-7 exemplificam os dados de *hold-up* e das taxas de descarga e alimentação, obtidos com o auxílio do sistema supervisório para ensaios com Ecat e Itabirito, respectivamente, os quais eram registrados a cada cinco segundos. As taxas foram determinadas por meio da diferença mássica, tanto do silo de alimentação quanto da bandeja de descarga, no tempo.

Para que o moinho alcançasse o regime estacionário mais rapidamente, os ensaios iniciaram com o carregamento prévio do moinho com uma massa de material, chamado de *hold-up* inicial. Essa massa inicial foi estipulada arbitrariamente para cada ensaio, sendo igual a 4,4 kg para o ensaio da Figura IV-6 e 8,0 kg para o ensaio da Figura IV-7.

A Figura IV-6 apresenta os dados colhidos de uma moagem realizada com Ecat com o grau de enchimento (J) de 0,30 e fração da velocidade crítica (φ_c) de 0,75. É possível observar na Figura IV-6 que a taxa de alimentação apresentou duas perturbações: nos tempos de 50 e 80 minutos de ensaio. Essas perturbações foram causadas pelo procedimento de reabastecimento do silo do alimentador. Nestes casos, foi possível observar a atuação do sistema de controle da alimentação, o qual se mostrou robusto ao

alto nível de ruídos de medição, trazendo a alimentação de volta ao *set-point* em ambos os casos.

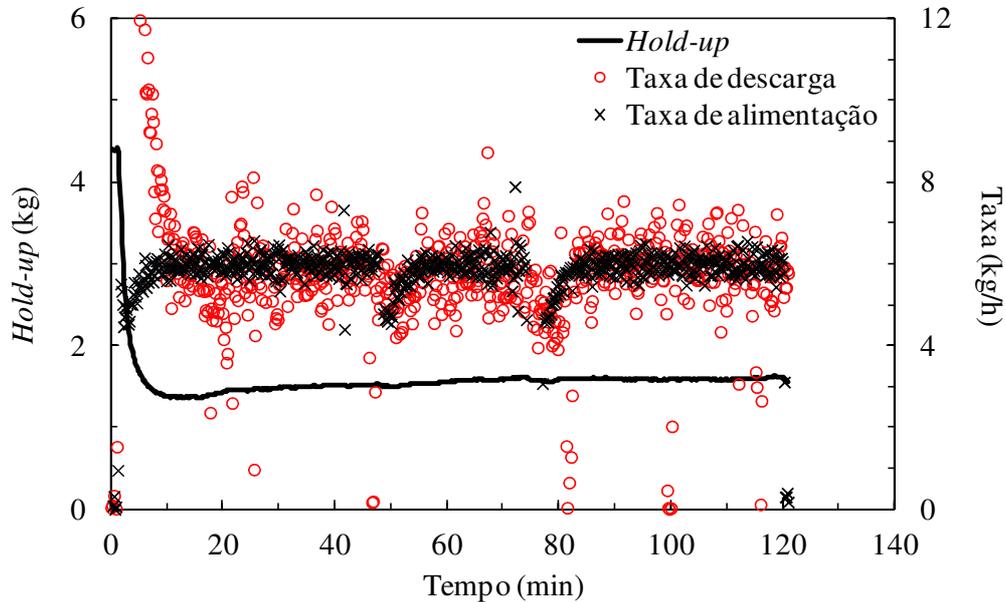


Figura IV-6 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat ($J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$), obtidos do sistema supervisor.

A Figura IV-7 apresenta os dados colhidos de uma moagem realizada com minério de ferro com o grau de enchimento (J) de 0,20 e fração da velocidade crítica (φ_c) de 0,30. É possível observar na Figura IV-7 que a taxa de descarga atingiu valores altos (36 kg/h) nos primeiros cinco minutos de ensaio, enquanto que a taxa de alimentação já havia se estabilizado em 9 kg/h. Essa diferença significativa entre as taxa de descarga e alimentação mostra o grande volume de material na câmara de moagem naquele intervalo de tempo, havendo uma necessidade, por parte do equipamento, em esvaziar a câmara de moagem para que o estado estacionário fosse alcançado. Por questões práticas, bem como para não consumir uma quantidade excessiva de material durante o ensaio, interrompeu-se a taxa de alimentação durante 4 minutos, sendo novamente

ligada no tempo 9 minutos. Essa manipulação do moinho não interferiu no alcance do estado estacionário deste ensaio.

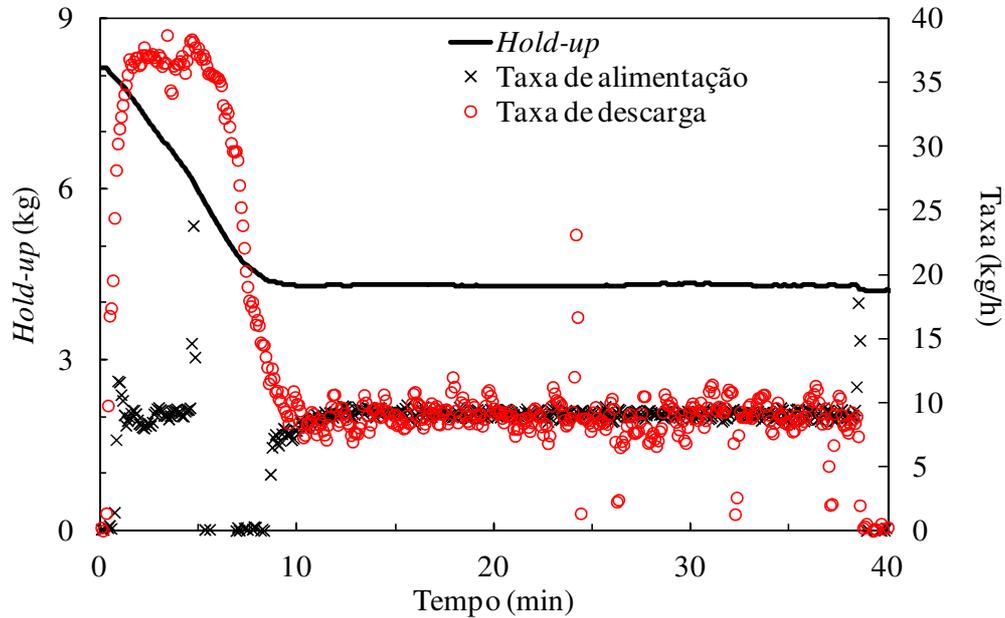


Figura IIV-7 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito ($J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$), obtidos do sistema supervisor.

Todos os ensaios alcançaram seus respectivos estados estacionários. A partir dos dados obtidos pelo sistema supervisor, foi possível estimar o *hold-up* em regime estacionário de cada ensaio. Para isso foi adotada uma rotina em Matlab®, desenvolvida por Canabarro (2011) com base no método de Jiang *et al.* (2003) e Caumo (2006), com o objetivo de identificar em quais períodos de tempo tem-se processo em regime estacionário.

As Tabelas IV-3 e IV-4 apresentam os *hold-ups* medidos nos regimes estacionários, assim como os preenchimentos de vazios e os tempos de residência médios calculados a partir daqueles.

Tabela IV-3 - Condições operacionais medidas em regime estacionário para o Ecat

Ecat	Hold-up		Preenchimento de vazios	Vazão		Tempo de residência médio (min)
	Kg	cm ³		cm ³ /min	Kg/h	
$J = 0,30$ $\varphi_c = 0,75$	1,56	630	0,39	40	6	15,7
	1,79	725	0,45	81	12	8,9
	2,20	891	0,56	121	18	7,4
$J = 0,20$ $\varphi_c = 0,75$	2,68	1085	1,02	40	6	26,8
	2,86	1158	1,08	81	12	14,4
	3,32	1344	1,26	109	16,2	12,2
$J = 0,30$ $\varphi_c = 0,30$	1,95	789	0,49	40	6	19,7
	2,40	972	0,61	81	12	12,1
	3,05	1235	0,77	109	16,2	11,4
$J = 0,20$ $\varphi_c = 0,30$	1,65	668	0,62	40	6	16,5
	2,44	988	0,92	81	12	12,0
	3,55	1437	1,34	109	16,2	13,2

Tabela IV-4 - Condições operacionais medidas em regime estacionário para o Itabirito

Itabirito	Hold-up		Preenchimento de vazios	Vazão		Tempo de residência médio (min)
	Kg	cm ³		cm ³ /min	Kg/h	
$J = 0,30$ $\varphi_c = 0,75$	5,45	1497	0,93	41	9	36,3
	6,11	1679	1,05	88	19,3	18,8
$J = 0,20$ $\varphi_c = 0,75$	5,51	1514	1,42	41	9	36,3
	6,66	1830	1,71	82	18	21,9
	7,98	2192	2,05	113	24,6	19,4
$J = 0,30$ $\varphi_c = 0,30$	4,10	1126	0,70	41	9	27,0
	5,40	1484	0,92	82	18	17,9
	6,16	1692	1,06	113	24,6	14,8
$J = 0,20$ $\varphi_c = 0,30$	4,31	1184	1,11	41	9	28,2
	4,57	1255	1,17	85	18,7	14,7
	5,34	1466	1,37	110	24,6	13,2

A Figura IV-8 apresenta a variação dos *hold-ups* em regime estacionário com as diferentes vazões de material, tanto para o Ecat quanto para o minério de ferro. É possível observar que, para mesmas vazões e condições operacionais, o minério de ferro apresenta um *hold-up* mais alto que o do Ecat. Isso poderia ser explicado pela maior capacidade de escoamento do Ecat em comparação com a do Itabirito, demonstrando a facilidade deste último de ser retido no interior do moinho, podendo ainda estar relacionado com os diferentes ângulos de repouso (Figura III-2). A Figura IV-8 ainda permite identificar a variação do *hold-up* com as diferentes condições operacionais ensaiadas, para um mesmo material, demonstrando a influência das condições impostas ao moinho.

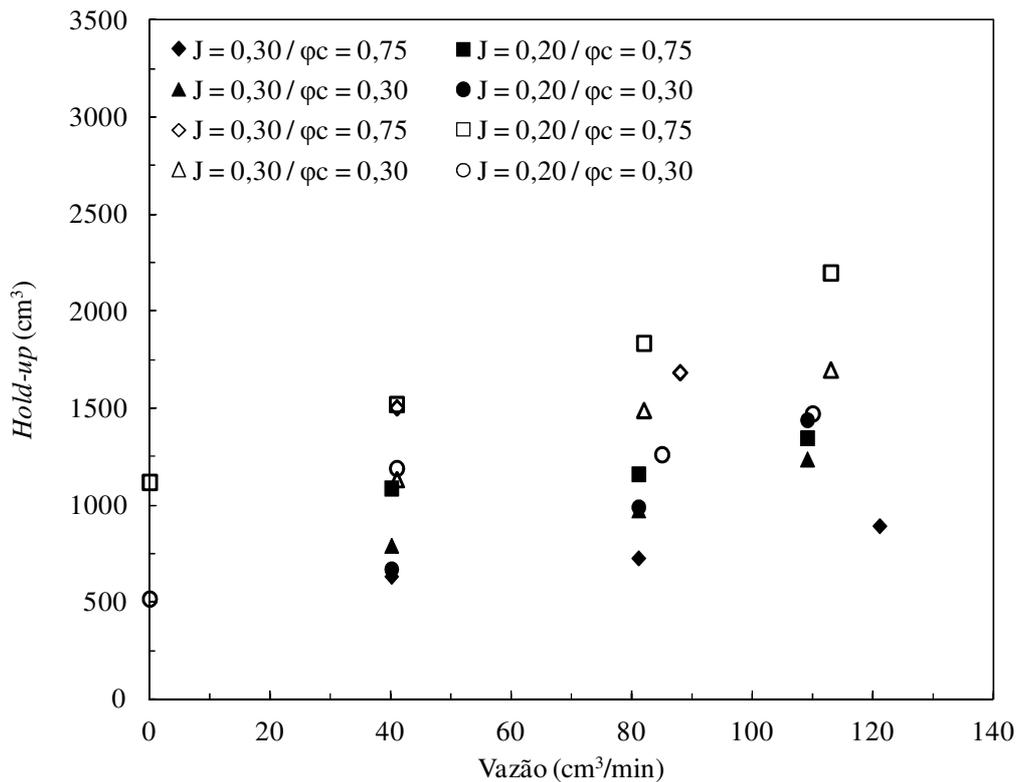


Figura IV-8 – Resultados de *hold-up* medidos em regime estacionário em função da vazão de material. Marcadores cheios e vazios representam resultados de ensaios com Ecat e Itabirito, respectivamente.

Durante o regime estacionário foram retiradas alíquotas do produto gerado pela moagem em cada ensaio para posterior análise granulométrica. Resultados típicos são apresentados na Figura IV-9. Um parâmetro comumente utilizado para avaliar a granulometria do material descarregado pelo moinho é o d_{80} , que significa o tamanho no qual 80% do material, em massa, é passante. As Tabelas IV-5 e IV-6 sintetizam as análises granulométricas de todos os ensaios na forma dos parâmetros d_{80} , d_{50} e d_{10} .

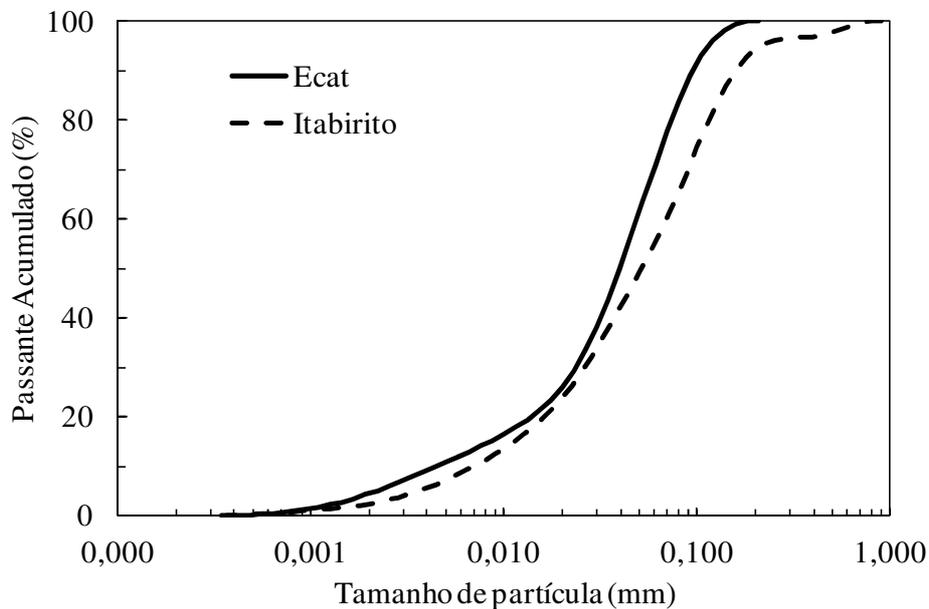


Figura IV-9 – Análise granulométrica do Ecat e Itabirito para as condições: $J = 0,30$, $\varphi_c = 0,75$ e vazão de 81 e 88 cm³/min, respectivamente.

Tabela IV-5 - Parâmetros granulométricos do produto gerado na moagem do Ecat

Condições Operacionais		d_{80} (μm)	d_{50} (μm)	d_{10} (μm)
Vazão (cm^3/min)				
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,75$	40	63,8	33,6	3,5
	81	72,8	39,9	4,5
	121	80,1	44,9	6,0
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,75$	40	*Nd	*Nd	*Nd
	81	82,8	47,4	6,5
	109	89,3	52,5	9,5
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,30$	40	71,9	41,1	5,0
	81	84,0	50,1	10,1
	109	89,3	54,1	13,8
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,30$	40	78,6	46,5	8,2
	81	92,9	56,3	14,4
	109	98,5	60,3	18,9

*Nd: medidas de distribuição granulométricas não realizadas.

Tabela IV-6 - Parâmetros granulométricos do produto gerado na moagem do Itabirito

Condições Operacionais		d_{80} (μm)	d_{50} (μm)	d_{10} (μm)
Vazão (cm^3/min)				
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,75$	41	88,3	36,3	3,5
	88	115,4	51,5	6,9
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,75$	41	115,6	53,2	6,0
	82	127,0	59,5	6,8
	113	135,8	63,6	8,7
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,30$	41	114,9	52,7	6,8
	82	133,4	65,0	8,4
	113	137,9	64,9	8,4
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,30$	41	126,1	61,6	6,6
	85	140,1	66,9	7,6
	110	142,4	66,5	9,6

IV.3.2 Simulação

A partir da solução do modelo do balanço populacional para a moagem contínua, cujos parâmetros para as funções quebra e taxa de quebra (seleção) foram estimados a partir dos resultados dos ensaios em batelada, bem como das evidências do modelo de mistura obtido pela medida da DTR, torna-se possível prever resultados de moagem em circuito aberto. Conforme apresentado no item IV-1, as configurações que melhor descrevem o transporte no interior do moinho são dois ou três misturadores perfeitos em série. A Figura IV-10 ilustra a representação esquemática dos misturadores considerando as duas configurações ótimas encontradas para o moinho em questão.

Acoplando a equação geral do modelo do balanço populacional (Equação 39) ao modelo de mistura considerando dois misturadores em série, e considerando que a operação esteja ocorrendo em estado estacionário ($W_{in} = W_{out} = W$), chega-se às seguintes equações:

$$p_i^{(1)}(t) = p_{in,i}(t) - s_i(t) p_i^{(1)}(t) \frac{0,2 H}{W} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j^{(1)}(t) \frac{0,2 H}{W} \right) \quad (\text{Eq. 47})$$

$$p_i^{(2)}(t) = p_i^{(1)}(t) - s_i(t) p_i^{(2)}(t) \frac{0,8 H}{W} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j^{(2)}(t) \frac{0,8 H}{W} \right) \quad (\text{Eq. 48})$$

sendo p_{in} a distribuição granulométrica da alimentação, $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ a distribuição granulométrica do primeiro e segundo misturador perfeito, respectivamente. Logo, a distribuição granulométrica do produto do moinho será igual a $p^{(2)}$. O modelo leva em consideração o resultado, apresentado na Tabela IV-1, que 20% do tempo total de residência foi gasto no misturador de número 1 e 80% no misturador 2.

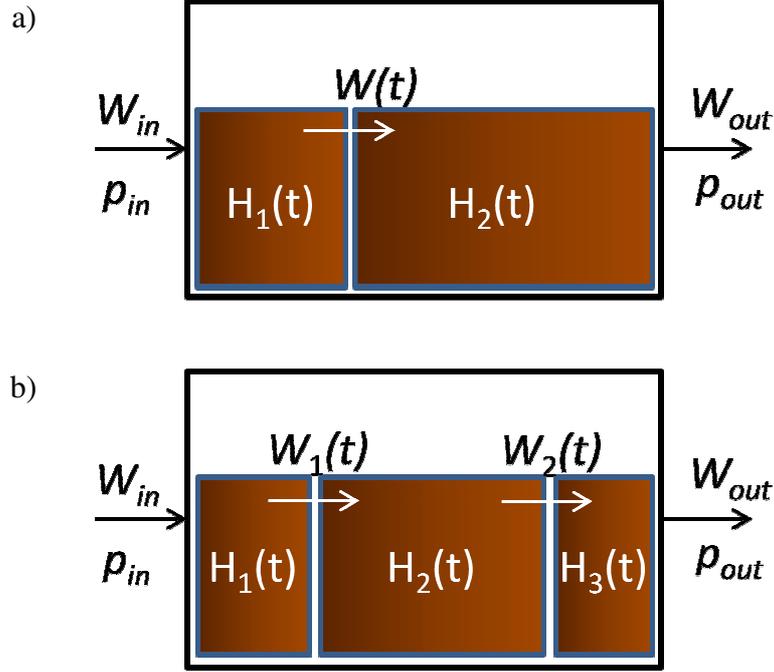


Figura IV-10 – Representação do moinho contínuo descrito como reatores de mistura perfeita em série: a) dois reatores; b) três reatores.

Para o modelo de mistura com três misturadores perfeitos em série, o produto do moinho será calculado pela solução sucessiva das equações:

$$p_i^{(1)}(t) = p_{in,i}(t) - s_i(t) p_i^{(1)}(t) \frac{0,1 H}{W} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j^{(1)}(t) \frac{0,1 H}{W} \right) \quad (\text{Eq. 49})$$

$$p_i^{(2)}(t) = p_i^{(1)}(t) - s_i(t) p_i^{(2)}(t) \frac{0,83 H}{W} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j^{(2)}(t) \frac{0,83 H}{W} \right) \quad (\text{Eq. 50})$$

$$p_i^{(3)}(t) = p_i^{(2)}(t) - s_i(t) p_i^{(3)}(t) \frac{0,07 H}{W} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} s_j(t) p_j^{(3)}(t) \frac{0,07 H}{W} \right) \quad (\text{Eq. 51})$$

sendo $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ e $p^{(3)}$ as distribuições granulométricas respectivamente no interior do primeiro, segundo e terceiro misturadores. Neste caso, a distribuição granulométrica do produto final do moinho será igual a $p^{(3)}$.

Infelizmente, o MBP não dispõe de informações *a priori* que permitam a previsão de como essas funções, em particular a taxa de quebra, são afetadas pelas condições de moagem, sendo necessária a utilização de alguma expressão empírica de escalonamento da taxa de quebra, como aquela proposta por Austin e colaboradores e descrita no Capítulo II. Essa foi a metodologia adotada em todas as simulações do presente trabalho. A não utilização de uma função deste tipo tornaria o MBP inviável para simular o moinho contínuo sob condições que diferem daquelas testadas em moinho descontínuo.

Inicialmente simulações foram realizadas considerando dois e três misturadores perfeitos, bem como presumindo que o *hold-up* encontrado nos ensaios contínuos experimentais, conforme apresentado na Tabela IV-3 e IV-4, fosse conhecido. Evidentemente, esse dado não é conhecido *a priori*. Entretanto, essas simulações foram realizadas com o objetivo de avaliar a adequação do modelo de mistura e do uso de dados da moagem descontínua na previsão da moagem contínua. As Figuras IV-11 e IV-12 apresentam as distribuições granulométricas do produto simulado para algumas condições operacionais para o minério de ferro e o Ecat, respectivamente, nas quais foi considerado o modelo de três misturadores em série. Ambas as figuras mostram uma boa concordância entre os resultados calculados e os medidos experimentalmente já que o modelo não foi ajustado para nenhum destes dados.

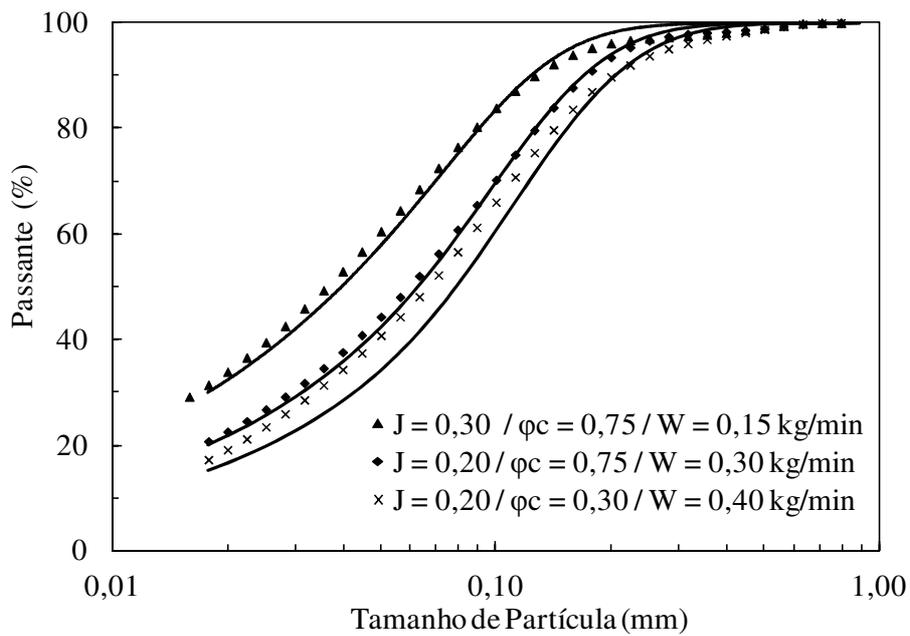


Figura IV-11 – Comparação das distribuições granulométricas medidas e simuladas considerando três misturadores perfeitos em série, relativas à moagem contínua do minério de ferro: símbolos representam dados experimentais e linhas os dados simulados.

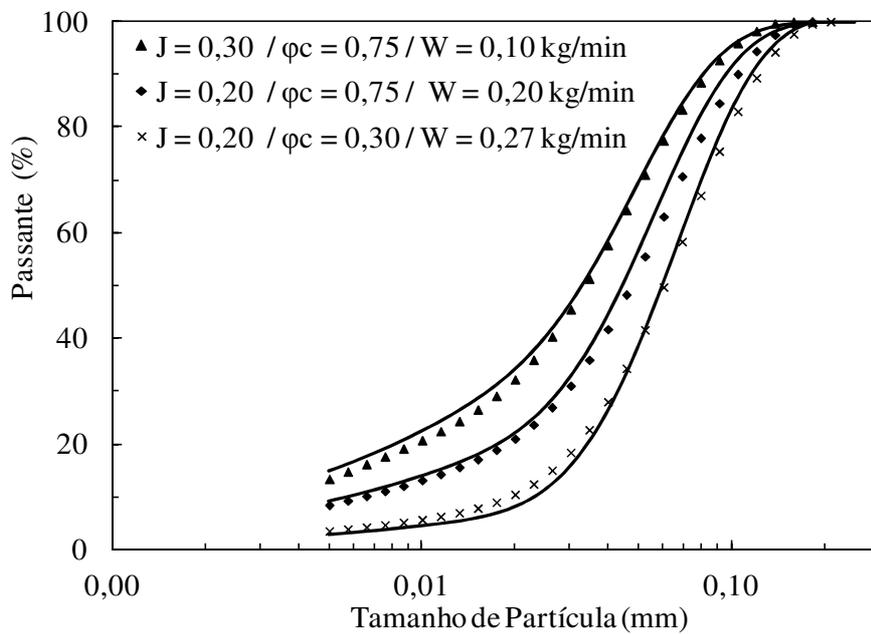


Figura IV-12 – Comparação das distribuições granulométricas medidas e calculadas considerando três misturadores perfeitos em série, relativas à moagem contínua do Ecat: símbolos representam dados experimentais e linhas os dados simulados.

A Figura IV-13 compara os resultados d_{80} , d_{50} e d_{10} obtidos a partir das distribuições granulométricas dos produtos gerados nas simulações do MBP, considerando o modelo de mistura para dois e três misturadores. Os resultados também são apresentados nas Tabelas IV-7 e IV-8. É possível observar que as previsões obtidas com os diferentes modelos de mistura produziram resultados equivalentes, ou seja, o produto simulado considerando dois misturadores tem, em essência, a mesma distribuição granulométrica que o produto gerado para três misturadores em série. Essa equivalência foi observada para todas as condições estudadas e para ambos os materiais avaliados. Isso também foi observado por Austin e Concha (1993) e Rajamani (1992).

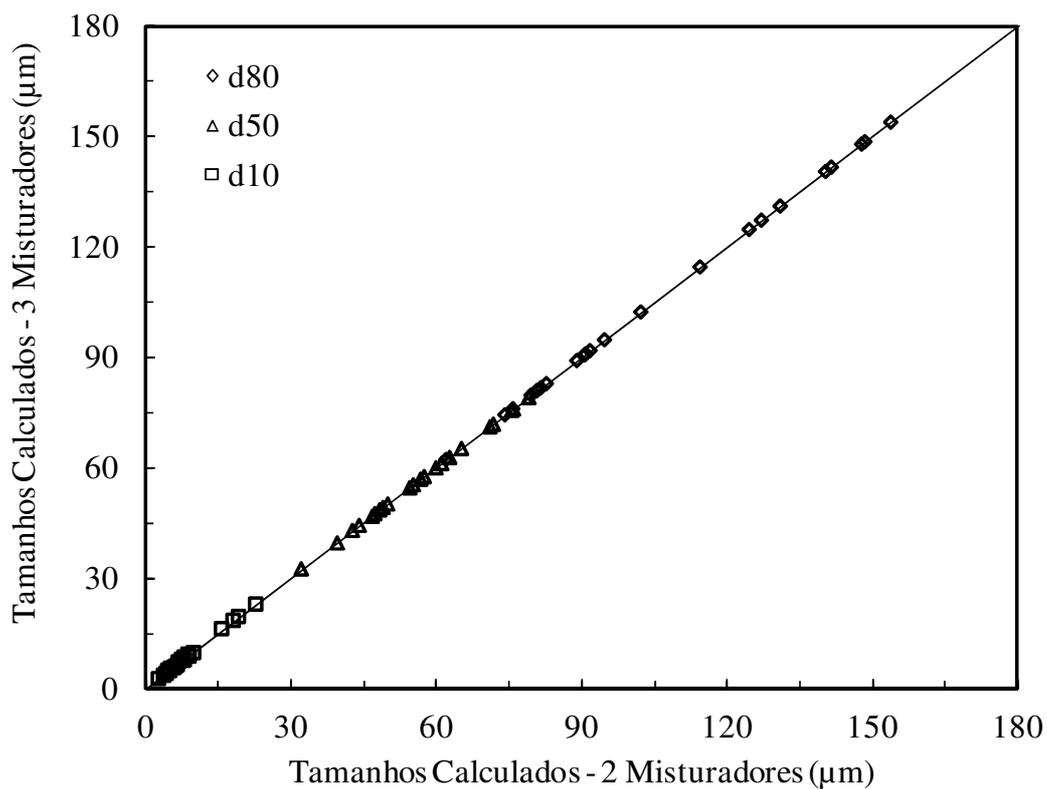


Figura IV-13 – Comparação dos parâmetros d_{80} , d_{50} e d_{10} simulados para dois e três misturadores perfeitos e para os dois materiais estudados, nas diferentes condições investigadas.

Essa correspondência observada permite concluir que o modelo de mistura para dois misturadores é o mais adequado para representar a moagem no moinho em questão, uma vez que apresenta o mesmo resultado que o outro, mas com um sistema de equações a menos. Este modelo é usado, a partir deste ponto, em todas as simulações do presente trabalho.

Tabela IV-7 - Parâmetros granulométricos do produto simulado para o Ecat, considerando o *hold-up* medido

Condições Operacionais	Para 2 misturadores			
	Vazão (cm ³ /min)	d_{80} (μm)	d_{50} (μm)	d_{10} (μm)
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,75$	40	62,0	32,1	2,6
	81	74,1	42,6	4,5
	121	79,5	47,3	6,7
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,75$	81	75,8	44,0	5,1
	109	81,5	49,0	7,9
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,30$	40	71,9	41,1	5,0
	81	84,0	50,1	10,1
	109	89,3	54,1	13,8
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,30$	40	82,7	49,9	8,7
	81	90,8	56,7	18,0
	109	94,7	59,9	22,7
	Para 3 misturadores			
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,75$	40	58,1	29,1	2,6
	81	71,9	40,9	4,3
	121	77,2	45,4	6,1
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,75$	81	75,6	44,1	5,5
	109	80,5	48,2	7,8
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,30$	40	79,4	47,5	7,3
	81	88,8	55,1	15,9
	109	91,9	57,7	19,8
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,30$	40	82,6	49,9	9,2
	81	91,0	57,0	18,7
	109	93,8	59,2	21,9

Tabela IIV-8– Parâmetros granulométricos do produto simulado para o Itabirito, considerando o *hold-up* medido

Condições Operacionais	Para 2 misturadores			
	Vazão (cm ³ /min)	d_{80} (μm)	d_{50} (μm)	d_{10} (μm)
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,75$	41	90,5	39,5	3,6
	88	114,4	54,5	4,9
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,75$	41	102,2	46,7	4,2
	82	127,1	62,7	6,0
	113	140,3	71,0	7,7
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,30$	41	124,5	61,1	5,8
	82	141,5	71,7	7,9
	113	148,4	75,9	8,9
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,30$	41	130,9	65,1	6,5
	85	147,8	75,5	8,9
	110	153,8	79,1	9,8
	Para 3 misturadores			
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,75$	41	90,6	39,6	3,7
	88	114,5	54,5	4,9
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,75$	41	102,3	46,8	4,2
	82	127,2	62,7	6,1
	113	140,4	71,1	7,7
$J = 0,30 / \varphi_c = 0,30$	41	124,7	61,1	5,8
	82	141,6	71,8	7,9
	113	148,5	75,9	9,0
$J = 0,20 / \varphi_c = 0,30$	41	131,0	65,2	6,5
	85	147,8	75,5	8,9
	110	153,8	79,1	9,8

Após determinar que o modelo de mistura mais adequado é o de dois misturadores perfeitos em série, os resultados das simulações da moagem contínua considerando os valores reais de *hold-up* são comparados aos valores experimentais, através do parâmetro d_{80} , conforme apresentado na Figura IV-14. As diferenças entre os valores calculados e medidos do parâmetro d_{80} , para cada teste com o moinho, podem ser expressas pelo desvio quadrático médio dos erros (DQ) dado por:

$$DQ = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_{80,exp} - d_{80,calc})^2} \quad (\text{Eq. 52})$$

no qual n é o número de elementos, $d_{80,exp}$ e $d_{80,calc}$ os parâmetros d_{80} medidos e calculados, respectivamente. O desvio encontrado entre os resultados é de 6,7 μm . Isso demonstra o bom nível de previsão que o modelo pode alcançar caso o *hold-up* real seja conhecido.

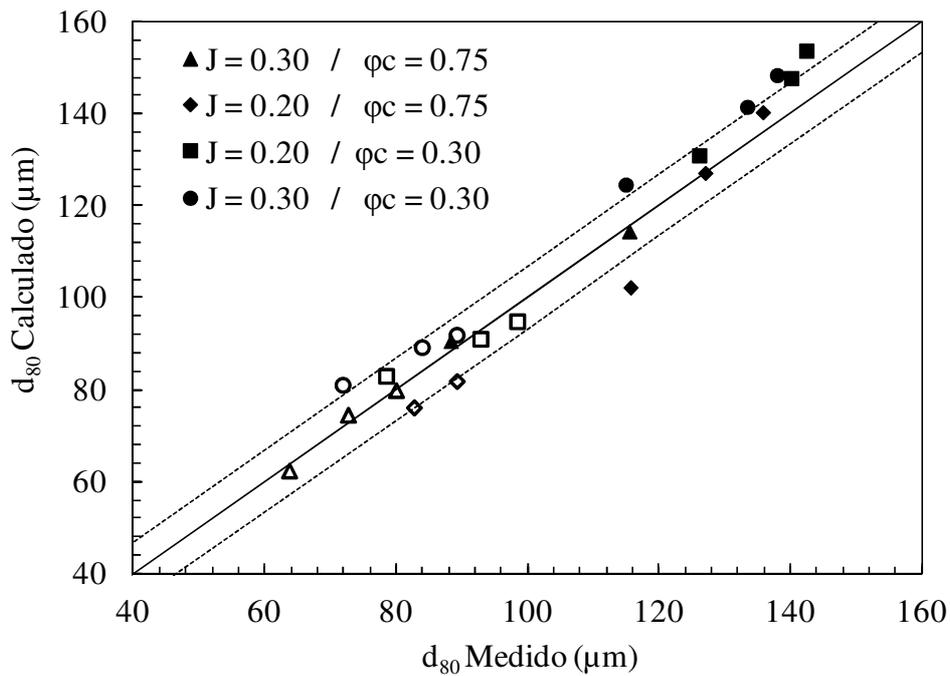


Figura IV-14 – Comparação entre os valores d_{80} medidos e calculados para os ensaios com os dois tipos de materiais, considerando U calculado a partir do *hold-up* medido. Marcadores cheios representam o Itabirito e os vazios o Ecat; linhas tracejadas representam a banda de erro de 6,7 μm .

Contudo, um desafio importante identificado na aplicação do método de escalonamento de Austin à moagem contínua está associado à previsão do *hold-up* de sólidos (H) para um conjunto de condições operacionais e taxa de alimentação (W). Embora aquele seja realmente medido diretamente nos testes, em moinhos industriais há dificuldades em estimar esse valor com precisão, de maneira que é comum considerar que o equipamento esteja operando a 100% da carga de sólidos, ou seja, $U = 1$. Essa massa de *hold-up* pode ser calculada, no caso de $U = 1$, por meio da equação:

$$H = \frac{0,24 \pi D_m^2 L J U \rho_s}{4} \quad (\text{Eq. 53})$$

na qual Dm é o diâmetro do moinho, L o comprimento, J o grau de enchimento e ρ_s é a massa específica dos sólidos. A Tabela IV-9 apresenta a massa de *hold-up* considerando $U = 1$ para cada condição de operação e cada tipo de material. É importante destacar que, de acordo com a Equação 53, o *hold-up* não é influenciado pela fração da velocidade crítica (φ_c).

Tabela IV-9 – Valores de *hold-up* calculados considerando $U = 1$

Condições Operacionais	Minério de Ferro	Ecat
	<i>Hold-up</i> (kg)	<i>Hold-up</i> (kg)
$J = 0,30$	5,84	3,96
$J = 0,20$	3,89	2,64

A partir dos valores de *hold-up* calculados usando a Equação 53, as simulações da moagem contínua foram conduzidas. As simulações cobriram a faixa de J e φ_c utilizadas com o Ecat e o minério de ferro, sendo apresentada na Figura IV-15 a comparação dos

valores d_{80} para os resultados experimentais e para os simulados. Os resultados encontrados foram bons, com um desvio médio de $7,5 \mu\text{m}$, visto que os valores de U experimentais diferem significativamente do valor presumido nestas simulações, conforme apresentado na Figura IV-16. A figura mostra a variação do preenchimento intersticial (U), como função das condições de moagem, incluindo a taxa de alimentação. Nela é possível observar que os valores obtidos para o minério de ferro é, na média, mais elevados do que os encontrados para Ecat.

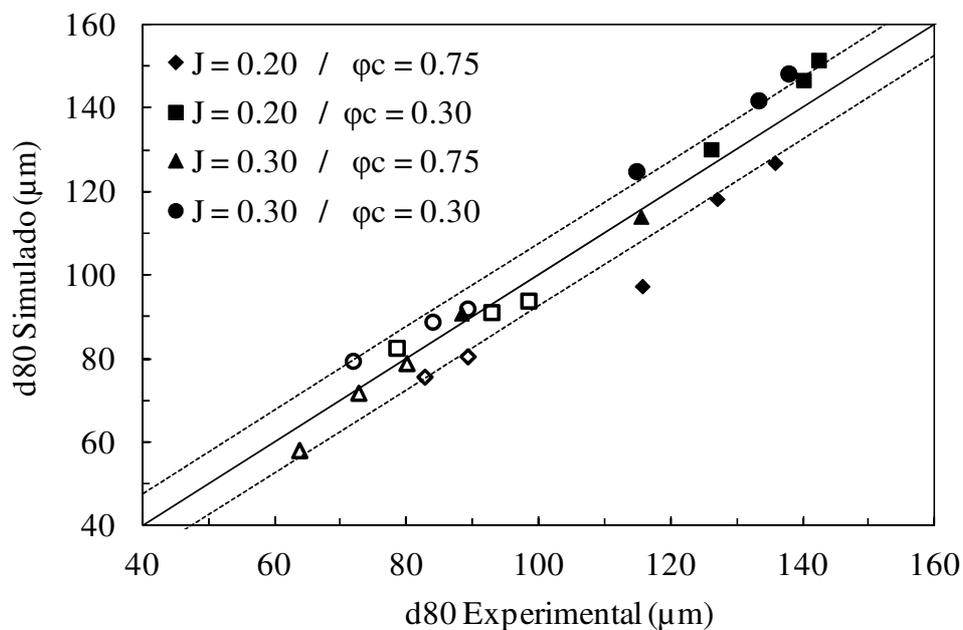


Figura IV-15 – Comparação entre os valores d_{80} medidos e calculados para os ensaios com os dois tipos de materiais, assumindo $U = 1$. Marcadores cheios representam o Itabirito e os vazios o Ecat; linhas tracejadas representam os desvios das previsões.

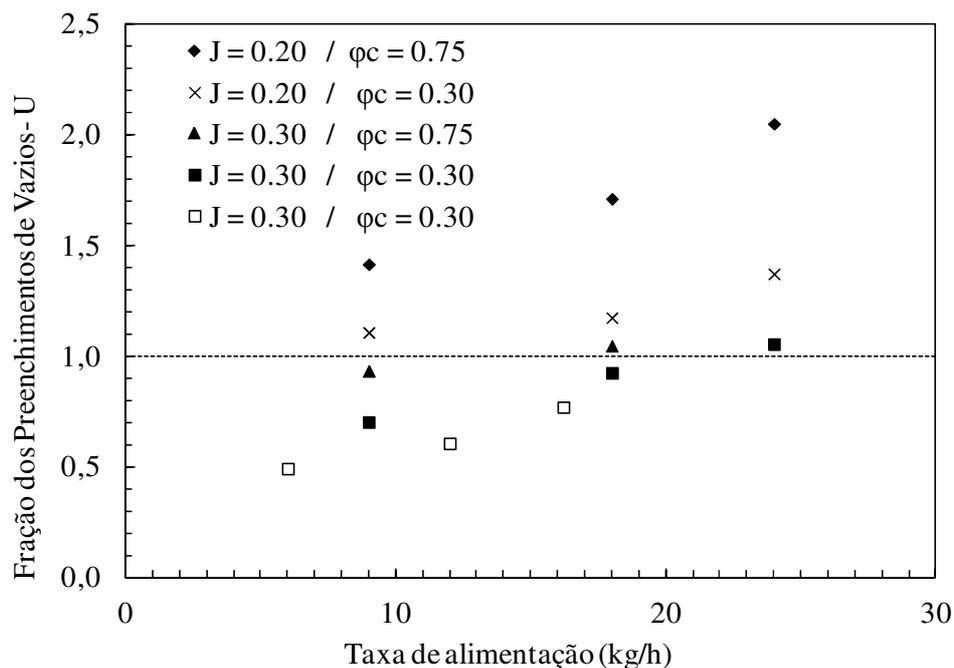


Figura IV-16 – Valores do Preenchimento de vazios (U) medidos nos de moagem contínua para minério de ferro e Ecat, em função da taxa de alimentação

Após a comparação entre os resultados gerados, com e sem conhecimento do valor real de *hold-up*, se torna evidente que a modelagem que considere o *hold-up* verdadeiro, das condições ensaiadas, irá apresentar um melhor resultado, ou seja, um produto simulado mais próximo do real. Devido à importância de se conhecer o valor de *hold-up* do equipamento, sob ação de determinadas condições, é que alguns autores estudam o transporte de massa dos moinhos contínuos.

Para Nomura (2012), o *hold-up* é função da taxa de alimentação, sendo diretamente proporcional a este (Equação 29). Assim, foram determinados os coeficientes angulares (k_1) de cada conjunto de condições operacionais ensaiadas, sendo determinada através de uma regressão linear simples. A Tabela IV-10 apresenta os coeficientes k_1 encontrados pelas regressões para ambos os materiais.

Segundo Nomura, este coeficiente é um parâmetro dependente, apenas, das características do material sólido. A fim de estabelecer um único coeficiente k_1 para as diferentes condições operacionais, foram calculadas as médias de cada material, sendo 6,0 e 7,2 os valores de k_1 encontrados para o Ecat e para o minério de ferro, respectivamente. A determinação do *hold-up* morto (H_0), ou seja, o intercepto da reta, foi obtido por meio da equação:

$$H_0 = \bar{H}_{exp} - k_1 \bar{W}_{exp} \quad (\text{Eq. 54})$$

na qual \bar{H}_{exp} é a média dos *hold-up* experimentais para um arranjo de condições operacionais e \bar{W}_{exp} a média das taxas de alimentações para o mesmo arranjo. A Tabela IV-11 apresenta os resultados encontrados pela Equação 54.

Tabela IV-10 – Valores encontrados para k_1 a partir de regressões lineares

Condições Operacionais	Ecat	Minério de Ferro
	Coeficiente Angular - k_1	Coeficiente Angular - k_1
J = 0,30 / $\varphi_c = 0,75$	3,2	3,9
J = 0,20 / $\varphi_c = 0,75$	3,6	9,3
J = 0,30 / $\varphi_c = 0,30$	6,3	7,9
J = 0,20 / $\varphi_c = 0,30$	10,9	7,9
Média	6,0	7,2

Com os parâmetros k_1 e H_0 , ajustados, tornou-se possível prever o *hold-up*, em regime estacionário, para ambos os materiais e nas mesmas condições operacionais. Para

verificar o ajuste dos parâmetros, bem como a previsão do modelo de *hold-up*, foram realizados simulações com as taxas de alimentação ensaiadas para determinação dos valores de *hold-up* do moinho.

Tabela IV-11– Valores de *hold-up* morto (H_0) calculados

Condições Operacionais	Ecat	Minério de Ferro
	<i>Hold-up</i> morto (cm ³)	<i>Hold-up</i> morto (cm ³)
J = 0,30 / $\varphi_c = 0,75$	264,0	1120,6
J = 0,20 / $\varphi_c = 0,75$	735,2	1234,6
J = 0,30 / $\varphi_c = 0,30$	538,1	864,1
J = 0,20 / $\varphi_c = 0,30$	570,5	676,6

A Figura IV-17 apresenta a comparação realizada entre os *hold-up* experimentais e os calculados. Os valores calculados de *hold-up* apresentaram uma boa correspondência com os valores experimentais, apresentando um desvio quadrático médio igual a 98 cm³. Esse desvio representa para os Ecat um erro médio de 242 gramas na previsão do *hold-up*, e para o minério de ferro o erro seria de 357 gramas, aproximadamente, conforme apresentado na Figura IV-18. Esses representam desvios pequenos de material se comparado à quantidade total de *hold-up* observada nos ensaios de moagem. Nesta figura é possível observar a diferença de declividade da reta existente entre os materiais analisados, demonstrando a influência do material no transporte de massa. Infelizmente, como um dos parâmetros do modelo (H_0) precisa ser estimado experimentalmente, o modelo ainda não é totalmente preditivo.

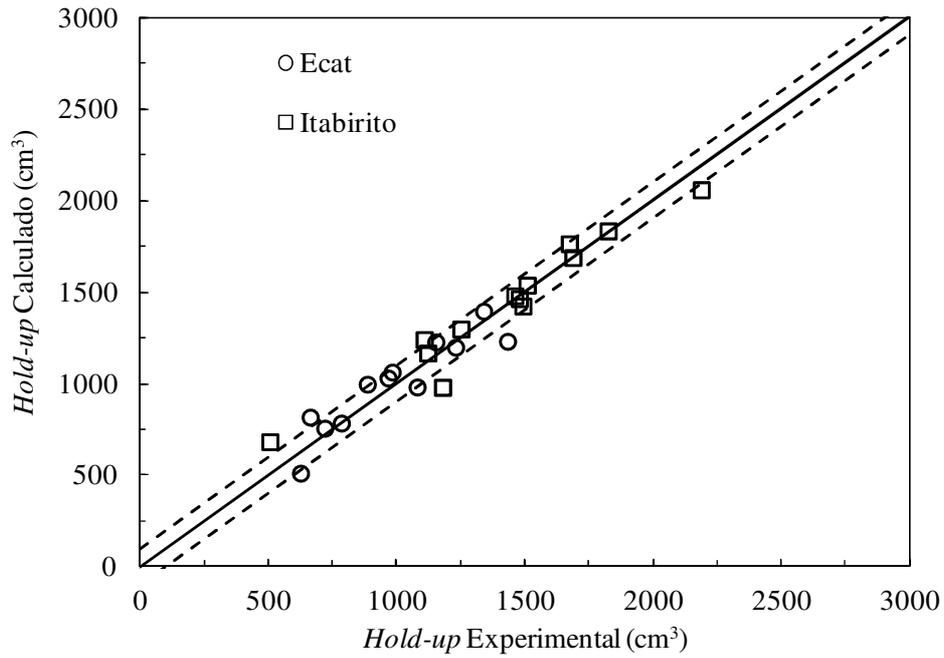


Figura IV-17 – Comparação entre os valores medidos e calculados dos *hold-up* do equipamento. As linhas tracejadas representam os desvios das previsões.

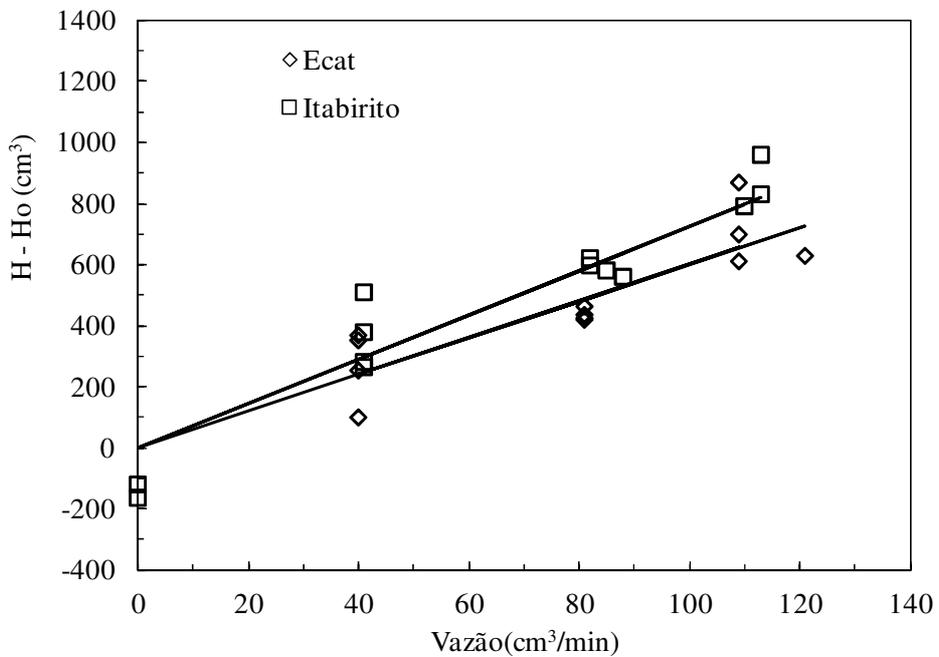


Figura IV-18 – Avaliação do ajuste realizado para k_1 . Os símbolos representam os valores experimentais ($H_{\text{exp}} - H_0$) e as linhas os valores calculados ($H_{\text{calc}} - H_0$).

V. CONCLUSÕES

Este trabalho tratou da modelagem de um moinho de bolas em operação contínua e em regime estacionário, para diversas condições operacionais, utilizando o Modelo do Balanço Populacional e parâmetros de ajuste do equipamento e do material encontrados experimentalmente em moinho de laboratório. A partir de resultados obtidos em um estudo anterior (Oliveira, 2009), a DTR do moinho foi modelada, sendo identificado que o moinho poderia ser descrito por misturadores perfeitos em série, sendo que um com volume predominante (aproximadamente 80%) e um ou dois misturadores adicionais menores. A descrição considerando um único misturador perfeito ou utilizando o modelo de mistura axial não se mostrou eficiente.

O modelo do balanço populacional da moagem descontínua foi capaz de descrever adequadamente os resultados experimentais, desde que a função quebra fosse descrita considerando uma função não-normalizável.

Ensaio experimentais de moagem contínua foram realizados para que fosse possível estabelecer comparações entre os resultados medidos e os resultados simulados, em diferentes condições operacionais. O método implementado por Canabarro (2010) para determinar as regiões estacionárias em equipamentos dinâmicos demonstrou-se versátil, tornando-se uma ferramenta indispensável na avaliação de estados estacionários.

A partir dos *hold-up* encontrados experimentalmente, a modelagem da moagem contínua foi realizada nas mesmas condições operacionais que os ensaios experimentais, utilizando os modelos de escalonamento de Austin. Os modelos de mistura correspondentes a dois e três misturadores perfeitos em série encontrados foram considerados, resultando em distribuições granulométricas idênticas do produto. Tendo

isso em vista e levando em conta o critério da simplicidade, o modelo de dois misturadores em série foi escolhido para a modelagem do equipamento.

A modelagem do moinho presumindo que o *hold-up* fosse conhecido gerou resultados simulados com boa correspondência aos resultados experimentais, com desvio médio de 6,7 μm na granulometria (80% passante) do produto. Isso demonstra a boa capacidade preditiva da função de escalonamento de Austin, já que os parâmetros não foram ajustados para todos os ensaios.

Infelizmente, como o *hold-up* nunca é conhecido *a priori*, simulações foram ainda realizadas presumindo que o moinho estivesse sempre operando a 100% do preenchimento de vazios. Essas simulações mostraram que os desvios entre os valores de d_{80} medidos e calculados do produto subiram para 7,5 μm , que mostra que o desconhecimento do valor do *hold-up* do moinho quando em operação, prejudica a previsão da granulometria do produto gerada pelo MBP.

A fim de preencher essa lacuna, uma tentativa foi realizada no sentido de aplicar o modelo recentemente desenvolvido por Nomura (2012) na previsão do *hold-up* a partir da taxa de alimentação. Observa-se que um dos parâmetros do modelo, que descreve a relação entre a vazão de sólidos e o *hold-up* é, de fato, relativamente independente das condições de moagem, dependendo apenas do material. A aplicação mais rigorosa desse modelo permitirá o aumento da confiança na previsão da moagem contínua a partir de resultados em batelada.

VI. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABOUZEID, A. Z. M., FUERSTENAU, D. W., 1980, “A Study of The Hold-up in Rotary Drums Discharge End Constrictions”, *Powder Technology*, v. 25, pp. 21-29.
- ALVES, V. K., 2006, *Otimização de Carga Moedora Utilizando Ferramentas de Modelamento Matemático e Simulação de Moagem*. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- AUSTIN, L. G., CONCHA, F. A., 1993, *Diseño y Simulación de Circuitos de Molienda y Clasificación*. CYTED.
- AUSTIN, L. G., KLIMPEL, R. R., LUCKIE, P. T., 1984, “Process Engineering of Size Reduction”, *AIME-SME*.
- AUSTIN, L. G., HOGG, R., SHOJI, K., 1974, “Axial Transport of Dry Powders in Horizontal Rotating Cylinders”, *Powder Technology*, v. 9, pp. 99-106.
- BARRIOS, G. K. P., 2010, *Estudo da Quebra de Leitões de Partículas Aplicado à Modelagem Generalizada da Cominuição*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- BAZIN, C., ST-PIERR, M., HODOUIN, D., 2004, “Calibration of The Perfect Mixing Model to a Dry Grinding Mill”, *Powder Technology*, v. 149, pp. 93-105.
- BENZER, H., ERGUN, L., LYNCH, A. J., ONER, M., GUNLU, A., CELIK, I. B., AYDOGAN, N., 2001, “Modeling Cement Grinding Circuits”, *Minerals Engineering*, v. 14, pp. 1469-1482.
- BENZER, H., 2005, “Modeling and simulation of a fully air swept ball mill in a raw material grinding circuit”, *Powder Technology*, v. 150, pp. 145-154.
- BERALDO, J. L., 1987, *Moagem de Minérios Em Moinhos Tubulares*. Editora Edgard Blücher.

- BOND, F. C., 1952, “The Third Theory of Comminution”, *Transactions of The AIMME*, New York, v. 193, pp. 484-494.
- BOULVIN, M., RENOTTE, C., VANDE WOUWER, A., REMY, M., TARASIEWICZ, S., CESAR, P., 1999, “Modeling, Simulation and Evaluation of Control Loops For A Cement Grinding Process”, *Euro Journal of Control*, v. 5, pp. 10–18.
- BROADBENT, S. R. & CALLCOTT, T. G., 1956, “A Matrix Analysis of Process Involving Particle Assemblies”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. A 249, pp. 99-123.
- BROWN, R. L., 1941, “Broken Coal-III Generalized Law of Size Reduction”, *Journal of the Institute of Fuel*, v. 14, pp. 129-134, London.
- CANABARRO, L. R., 2011, *Inferência Dinâmica em Colunas de Destilação para uma Unidade de Processamento de Gás Natural*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CARVALHO, R. M., TAVARES, L. M. M., 2006, “Simulação Dinâmica da Moagem A Seco em Moinho de Bolas”. Anais do *IX Encontro de Modelagem Computacional*, Belo Horizonte, MG.
- CARVALHO, R. M., 2007, *Modelagem, Simulação e Controle da Moagem a Seco em Moinhos de Bolas*. Projeto Final de Curso, Escola de Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CARVALHO, R. M., 2009, *Desenvolvimento de Modelo Matemático Generalizado da Cominuição*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CAUMO, L., 2006, *Aplicação e Cálculo da Derivada de Sinais de Processos Industriais*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

- CHEN, X., ZHAI, J., LI, S., LI, Q., 2007. "Application of model predictive control in ball mill grinding circuit", *Minerals Engineering*, v. 20, pp. 1099–1108.
- CHO, K., 1987, *Breakage Mechanisms in Size Reduction*, PhD thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA.
- CLEARY, P. W., 2006, "Axial transport in dry Ball Mills", *Application Math Model*, v. 30, pp. 1343-1355.
- CONCHA, F. A., 1995, "Value of First Principles and Phenomenological Modeling in Mineral Processing", *Proceedings of the XIX International Mineral Processing Congress*, San Francisco, 23-27 October.
- CUNHA, E. R., TAVARES, L. M. M., ALMEIDA, S. L., 2007, "Influência de Variáveis Operacionais no Desempenho de Classificador Aerodinâmico", *Revista Escola de Minas, Ouro Petro*, v. 60(3), pp. 497-503.
- DANCKWERTS, P.V., 1953, "Continuous Flow Systems, Distribution of Residence Times", *Chemical Engineering Science*, v. 2, pp. 1–13.
- DA SILVA, A. T., 2007, *Otimização da Moagem de Escória Granulada de Alto-Forno Por Meio da Simulação Computacional Usando o Modelo do Balanço Populacional*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- EPSTEIN, B., 1947, *Journal of the Franklin Institute*, v. 244, pp. 471-477.
- FARIA, E. F., 2012, *Concretos Autoadensáveis de Alto Desempenho Com Catalisador Residual do Craqueamento Catalítico Fluido (Ecat) de Refinarias de Petróleo*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- FILIPPOV, A. F., 1961, "Distribution of the Sizes Which Undergo Splitting", *Theory of Probability and Its Applications*, v. 6, pp. 275-280, English Translation, USSR.

- GARDNER, R. P., AUSTIN, L. G., 1962, "A Chemical Engineering Treatment of Batch Grinding Proceedings", *Proc. 2nd European Sym. Zerkliernern*, H. Rumpf and D. Behrens, Editors Verlag Chemie, pp. 217:247.
- GAUDIN, A. M. & MELOY, T. P., 1962, "Model and Comminution Distribution Equation for Repeated Fracture", *Trans. SME-AIME*, v. 223, pp. 43-50.
- GOVENDER, I., TUPPER, G. B., MAINZA, A. N., 2010, "Towards Mechanistic Model for Slurry Transport in Tumbling Mills", *Comminution '10*, Cape Town, South Africa.
- HERBST, J. A., FUERSTENAU, D. W., 1980, "Scale-up Procedure for Continuous Grinding Mill Design Using Population Balance Models", *International Journal of Mineral Processing*, v.7, pp. 1-31.
- HERBST, J. A., RAJAMANI, K., 1982, "The Application of Modern Control Theory to Mineral-Processing Operations", *12th CMMI Congress*.
- HOGG, R., 1984, "Mass Transport Models For Tumbling Ball Mills", *Society of Mining Engineers*, Editors J.A. Herbst, Chapter 7.
- HUKKI, R. T., 1961, "Minerals Beneficiation: Proposal for a Solomonic Settlement Between The Theories of von Rittinger, Kick and Bond", *AIME Transactions*, New York, v. 220, pp. 403-408.
- KALLEMBACK, G. M., 2012, *Otimização e Controle Preditivo Não Linear de Circuito de Moagem a Seco*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- KING, R. P., 2001, *Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems*. Editors Butterworth-Heinemann.
- JIANG, T., CHEN, B., HE, X., STUART, P., 2003, "Application of Steady-State Detection Method Based on Wavelet Transform", *Computers and Chemical Engineering*, v. 27, pp. 569-578.

- JOHANSEN, S. T., SILVA, S. R., 1996, “Some Considerations Regarding Optimum Flow Fields for Centrifugal Air Classification”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 44-45, pp. 703-721.
- LEPORE, R. A., WOUWER, V., REMY, M., 2003, “Nonlinear Model Predictive Control of Cement Grinding Circuits”, *Annuals ADCHEM*.
- LIU, Y., SPENCER, S., 2004, “Dynamic Simulation of Grinding Circuits”, *Minerals Engineering*, v. 17, pp. 1189-1198.
- LYNCH, A. J., ROWLAND, C. A., 2005, *The History of Grinding*. Society for Mining, Metallurgy and Exploration (SME).
- MAKOKHA, A. B., MOYS, M. H., 2010, “Modeling The RTD of a Industrial Overflow Ball Mill as a Function of Load Volume and Slurry Concentration”, *Comminution '10*, Cape Town, South Africa.
- MASSARANI, G., 2002, *Fluidodinâmica em Sistemas Particulados*. Editora E-Papers.
- MISHRA, B. K., RAJAMANI, R. K. 1992, “The Discrete Element Method for The Simulation of Ball Mills”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 16, pp. 598-604.
- MORI, Y., JIMBO, G., YAMAZAKI, M., 1967, “Flow Characteristics of Continuous Ball and Vibration Mill Mixing, Size Distribution, Dynamic Response of Flow Rate and Applications”, *Second European Symposium Zerkleinem*, v. 57, pp. 605-632.
- NAPIER-MUNN, T. J., MORRELL, S., MORRISON, R.D., KOJOVIC, T., 1996, *Mineral Comminution Circuits – Their Operation and Optimisation*. Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre (JKMRC), The University of Queensland.
- NEVES, P. B., 2005, *Características de Fragmentação e Microestruturais de Rochas e Seu Comportamento na Britagem para o Produção de Agregado*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- NOMURA, S., 2012, "Analysis of Hold-up in Continuous Ball Mills", *Powder Technology*, v.235, pp. 443-453.
- OLIVEIRA, A. L. R., 2009, *Modelagem e Simulação de Moinhos de Bolas Operado em Escala Piloto a Seco*. Projeto Final de Curso, Escola Politécnica, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.
- ÖZER, C. E., ERGÜN, S. L., BENZER, A.H., 2006, "Modeling of The Classification Behavior of The Diaphragms Used in Multi-Chamber Cement Mills", *International Journal Mineral Process*, v. 80, pp. 58-70.
- RAJAMANI, R. K., 1979, *Optimal Control of Closed Circuit Ball Mill Grinding*. D. Sc. Thesis, University of Utah, Salt Lake City, USA.
- RAJAMANI, R. K., HERBST, J. A., 1991, "Optimal control of a ball mill grinding circuit – I. Grinding Circuit Modeling and Dynamic Simulation", *Chemical Engineering Science*, v. 46, pp. 861-870.
- RAJAMANI, R. K., HERBST, J. A., 1991, "Optimal Control of A Ball Mill Grinding Circuit: Part II. Feedback and Optimal Control", *Chemical Engineering Science*, v. 46, pp. 871–879.
- RAJAMANI, R. K., 1992, *Mathematical Modeling of Extractive Metallurgical Processes*, Notas de Aula, University of Utah.
- RAMKRISHNA, D., BORWANKER, J. D., 1973, "A Puristic Analysis of Population Balance", *Chemical Engineering Science*, v. 28, pp. 1423-1435.
- RAMKRISHNA, D., 2000, *Population Balances: Theory and Applications to Particulate Systems in Engineering*. Editors Academic Press.
- REID, K.J., 1965, "A Solution to The Batch Grinding Equation", *Chemical Engineering Science*, v. 29, pp. 953-963.
- SAMPAIO, C. H., TAVARES, L. M. M., 2005, *Beneficiamento Gravimétrico – Uma Introdução aos Processos de Concentração Mineral e Reciclagem de Materiais por Densidade*. Editora UFRGS.

- SCHOFIELD, C. G., 1980, "Homogenization / Blending Systems design and Control for Mineral Processing", *Series on Bulk Materials Handling*, Trans Tech Publications, Germany.
- SEDLATSCHEK, K. & BASS, L., 1953, "Contribution to the Theory of Milling Processes", *Powder Metallurgy Bulletin*, v. 6, pp. 148-153.
- SHOJI, K., LOHRASB, S., AUSTIN, L. G., 1979, "The Variation of Breakage Parameters with Ball and Powder Loading in Dry Ball Milling", *Powder Technology*, v. 25, pp. 109-114.
- SICHALWE, K., GOVENDER, I., MAINZA, A. N., 2010, "Characterizing Porosity of Multi-Component Mixtures in Rotary Mills", *Minerals Engineering*, v. 24, pp. 276-281.
- SONGFACK, P., RAJAMANI, R., 1999, "Hold-up Studies in a Pilot Scale Continuous Ball Mill: Dynamic Variations Due to Changes in Operation Variables", *International Journal Minerals Process*, v. 57, pp. 105-123.
- SILVA, M. C. C., 2007, *Relações entre Microestrutura, Composição, Resistência à Ruptura e Moabilidade de Clínqueres de Cimento Portland*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- TAVARES, L. M., 1997, *Microscale Investigation of Particle Breakage Applied to the Study of Thermal and Mechanical Predamage*, Ph. D. Thesis, University of Utah.
- TAVARES, L. M. M. KING, R.P., 1998, "Estuda da Quebra de Partículas na Célula de Carga Ultra-Rápida Aplicados a Cominuição Industrial", *XVII Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Metalurgia Extrativa*, v. 1, pp. 115-134.
- TAVARES, L. M. M., 2005, *Operações Unitárias em Processamento Mineral*. Apostila do curso de Processamento de Recursos Minerais I do Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- TAVARES, L.M., CARVALHO, R.M., 2009, "Modeling Breakage Rates of Coarse Particles in Ball Mills", *Minerals Engineering*, v. 22, pp. 650-659.
- VÀHL, L., KINGMA, W. G., 1952, "Transport of Solids Through Horizontal Rotary Cylinders", *Chemical Engineering Science*, v. 1, pp. 253-258.
- VON RITTINGER, P.R., 1867, *Leherbuch der Aufbereitungskunde*, Berlín, Germany.
- WANG, X., GE, X. Z. X., WANG, Z., 1998, "A Model for Performance of The Centrifugal Counter Current Air Classifier", *Powder Technology*, v. 98, pp. 171-176.
- WHITEN, W. J., 1972, "A Model for Simulating Crushing Plants", *Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, v. 72, n. 10, pp. 257-264.
- WOOD, T.R., 1980, *An Experimental Study of Mass Transport in a Dry, Grate-Discharge Ball Mill*. M.Sc. Thesis, The Pennsylvania State University, Department of Mineral Engineering.

VII. ANEXOS

VII.1.1 Dados das condições operacionais ensaiadas

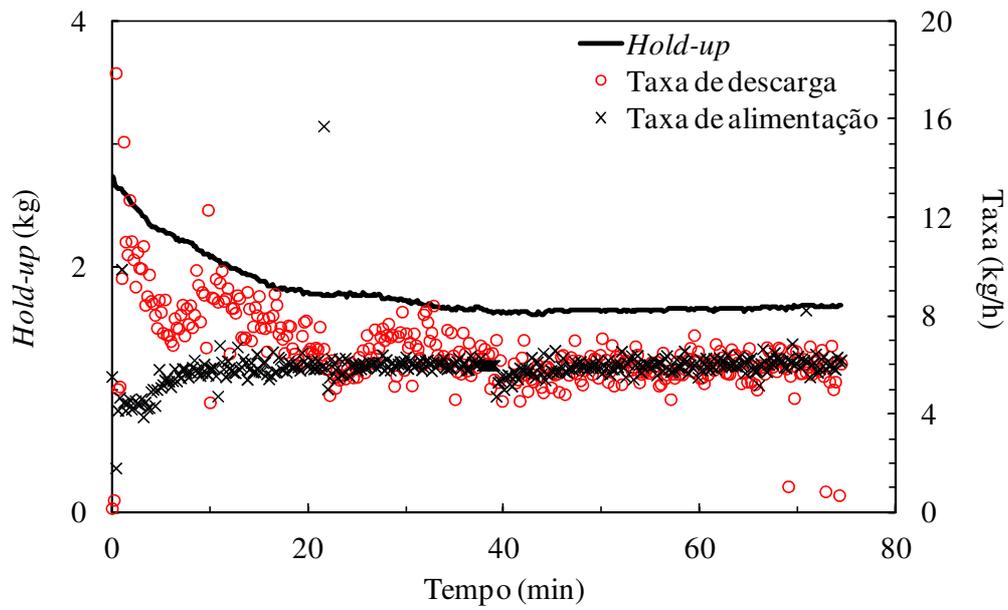


Figura VII-1 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 6 \text{ kg/h}$ ($40 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$.

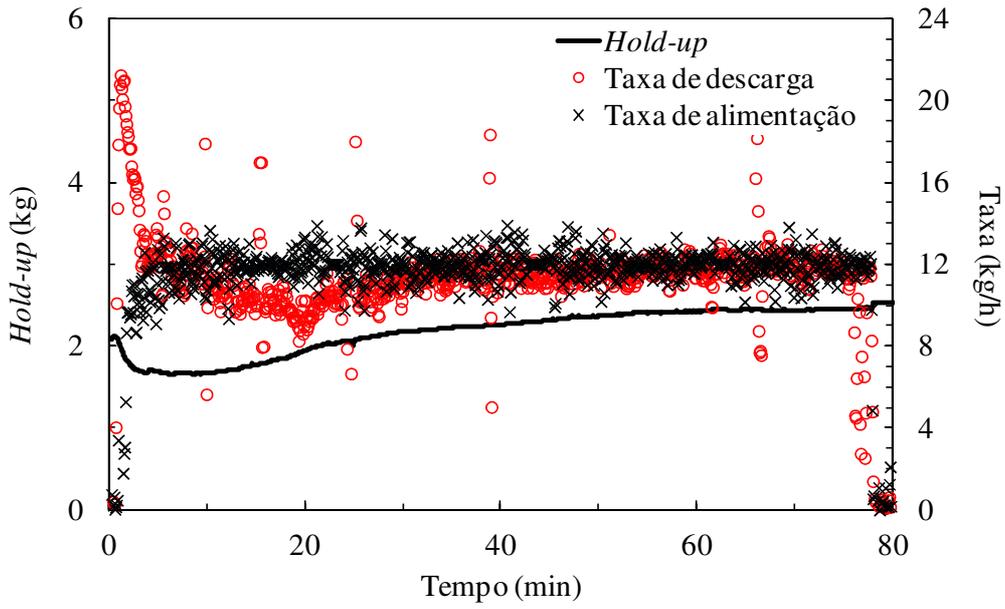


Figura VII-2 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$.

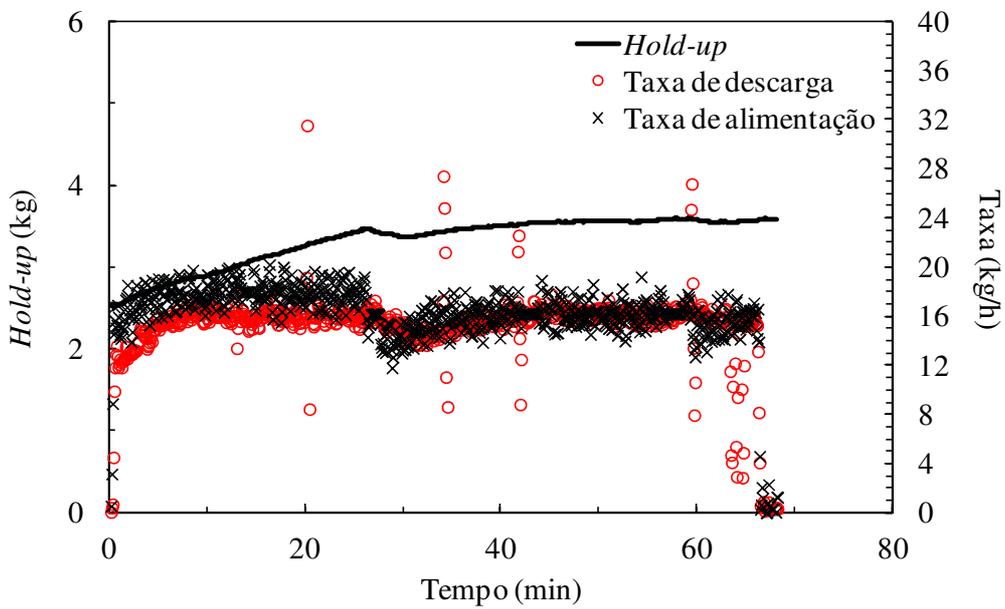


Figura VII-3 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 16,2 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$.

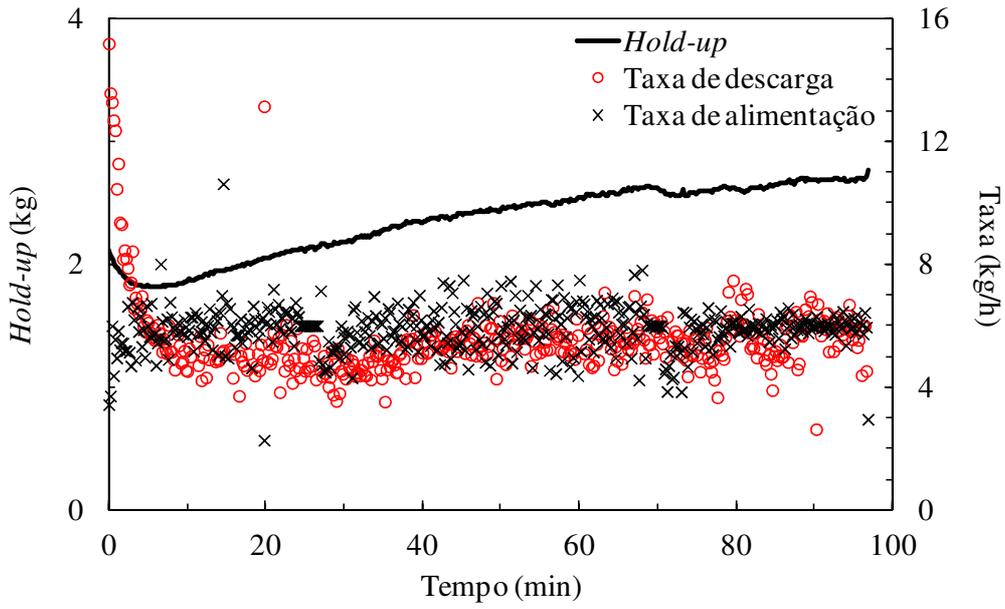


Figura VII-4 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 6 \text{ kg/h}$ ($40 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$.

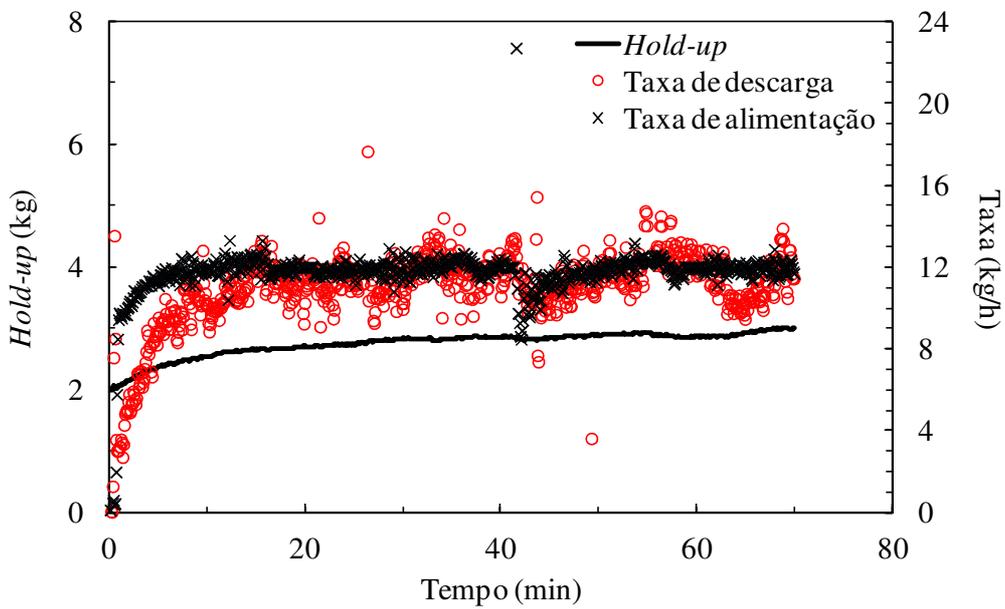


Figura VII-5 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 12 \text{ kg/h}$ ($81 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$.

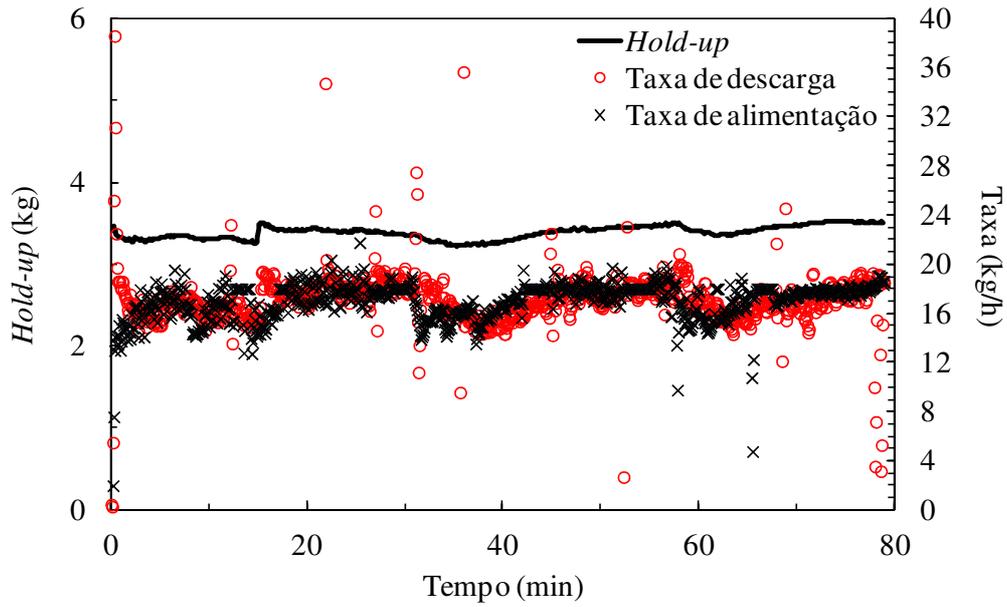


Figura VII-6 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 16,2$ kg/h (109 cm^3/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$.

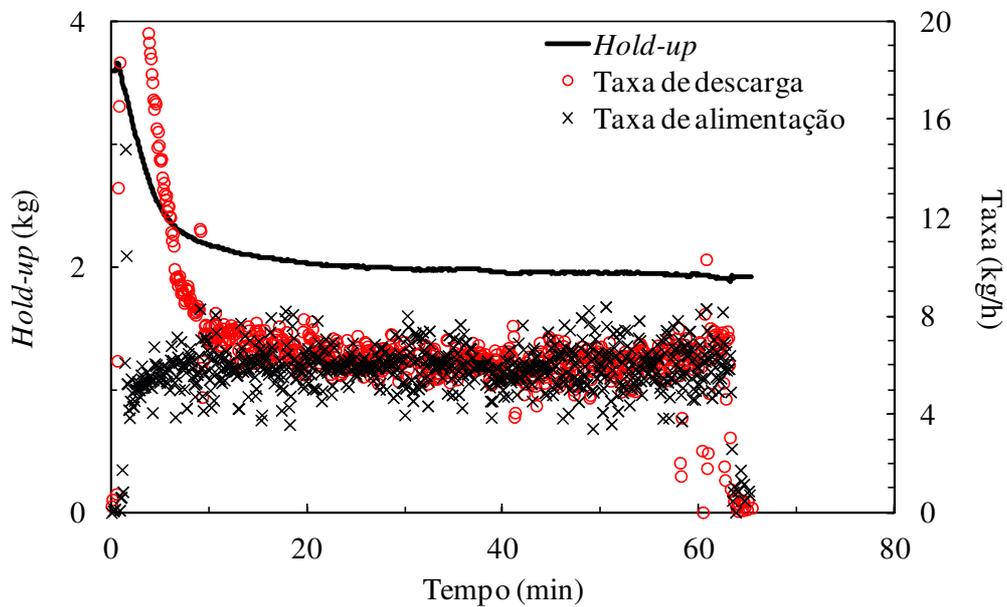


Figura VII-7 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 6$ kg/h (40 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$.

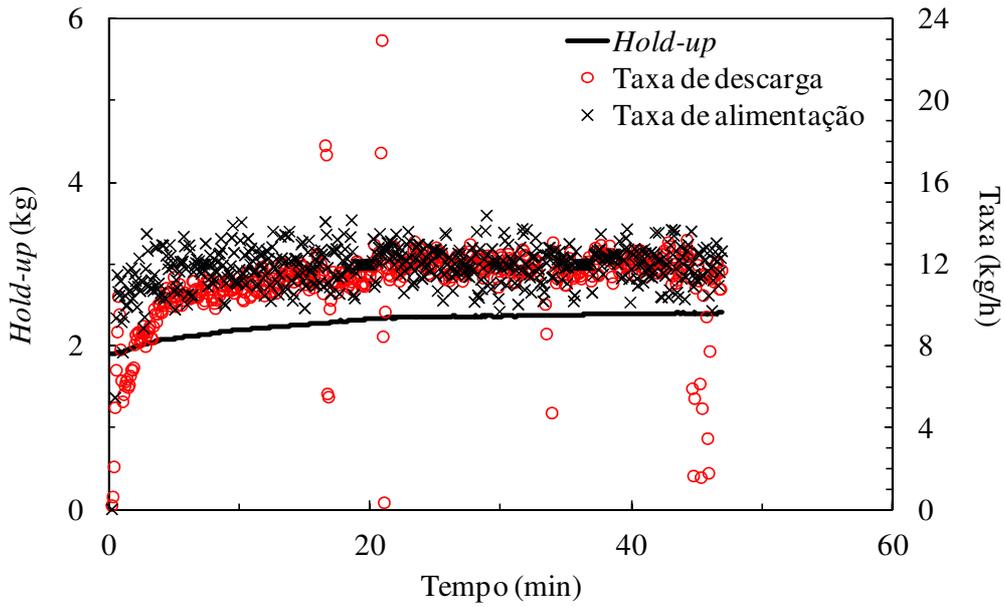


Figura VII-8 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$.

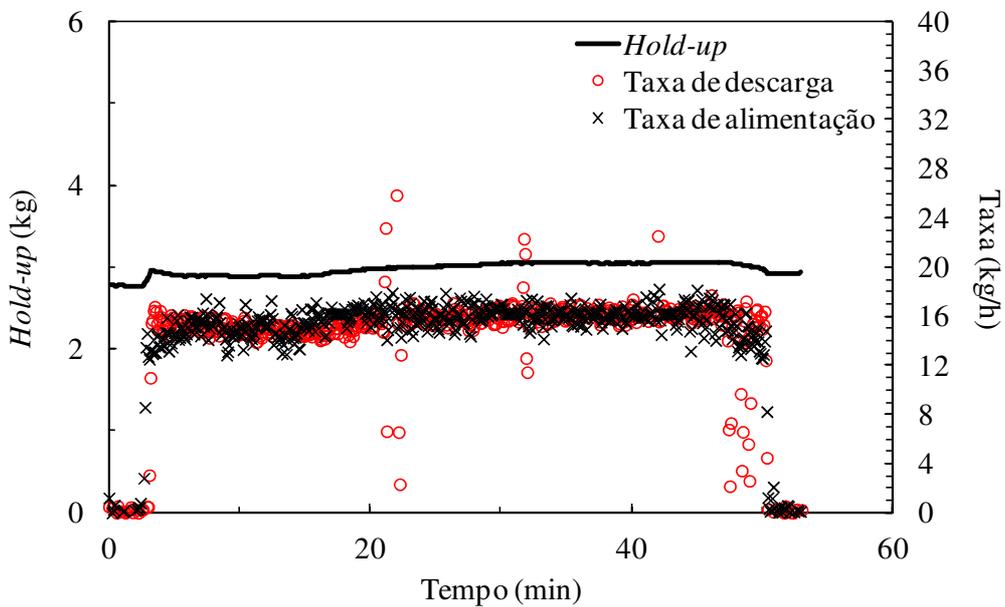


Figura VII-9 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 16,2 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$.

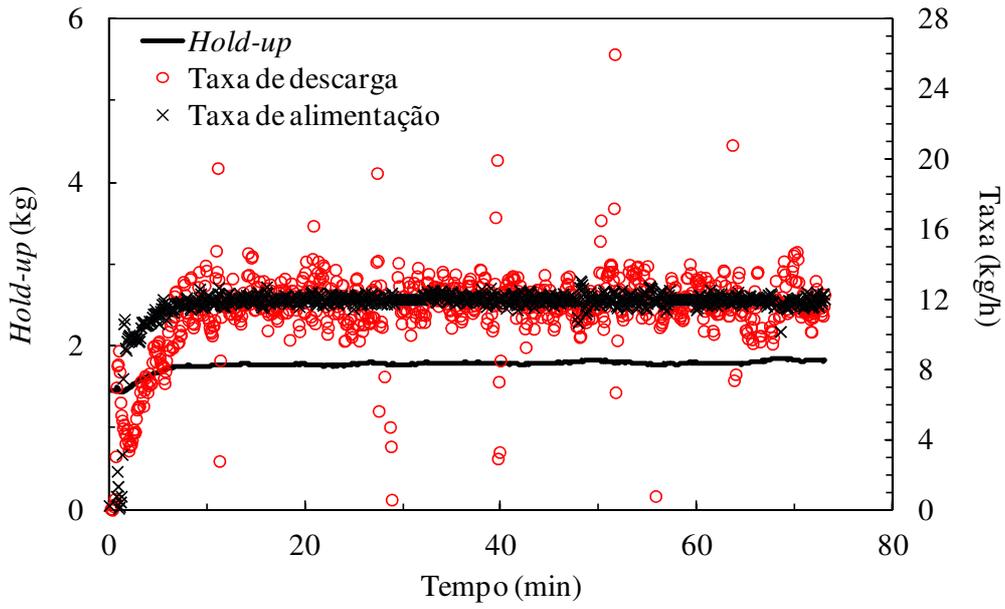


Figura VII-10 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 12 \text{ kg/h}$ (81 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$.

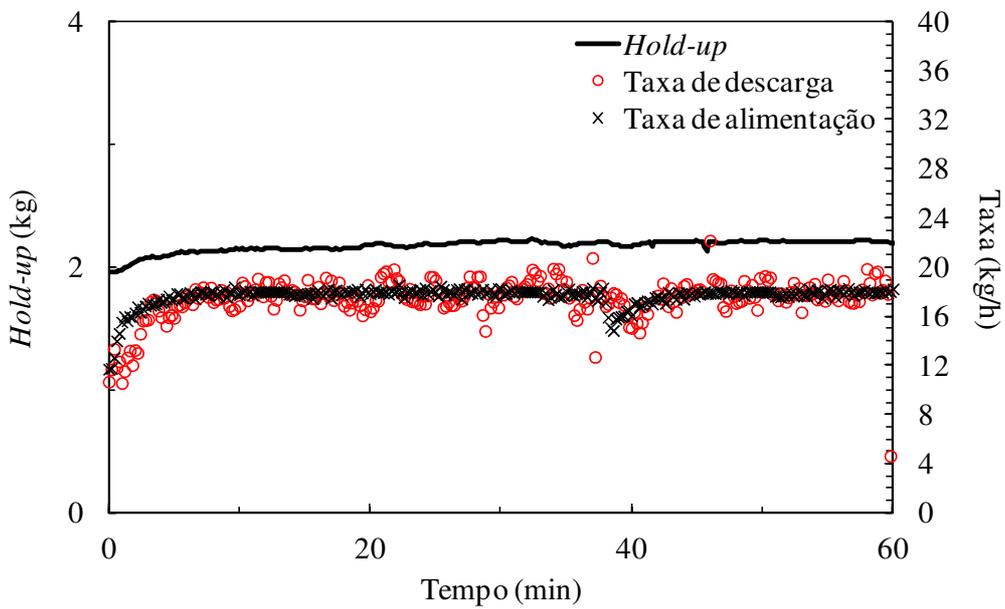


Figura VII-11 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Ecat: $W_{in} = 18 \text{ kg/h}$ (109 cm^3/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$.

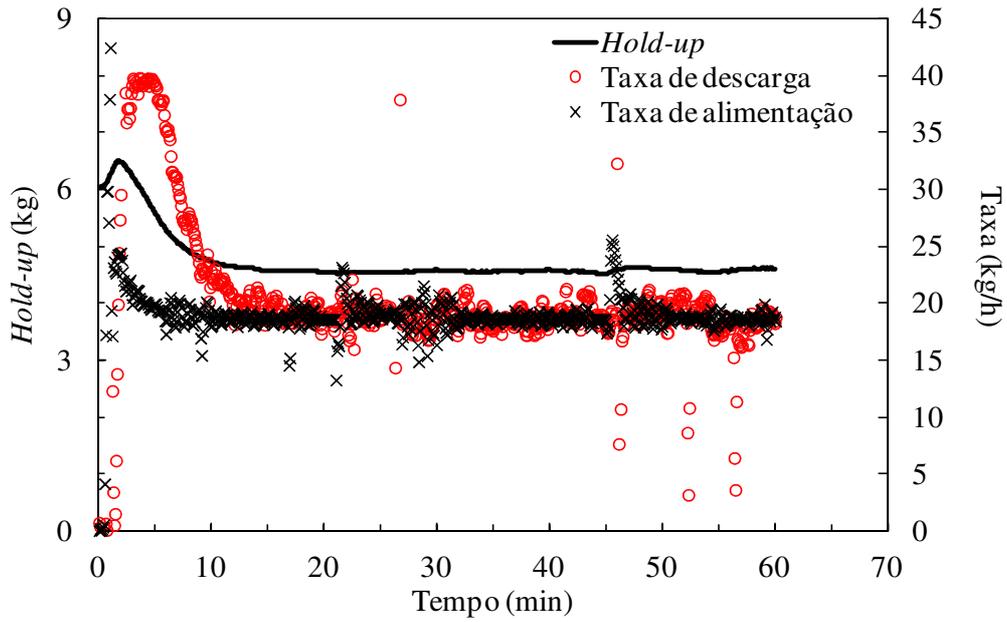


Figura VII-12 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18$ kg/h
($82 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$.

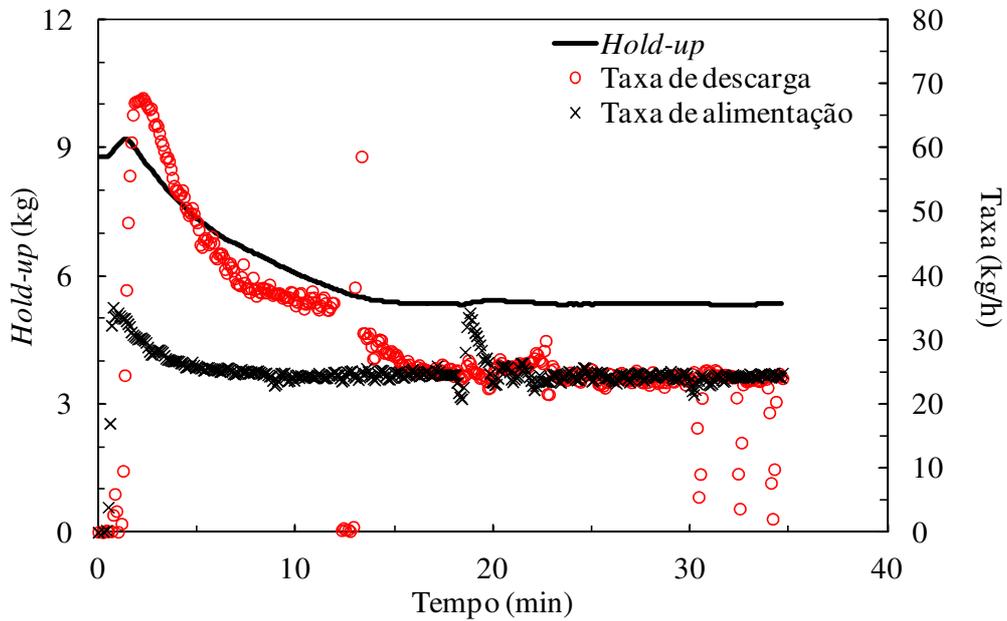


Figura VII-13 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 24,6$ kg/h
($113 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,30$.

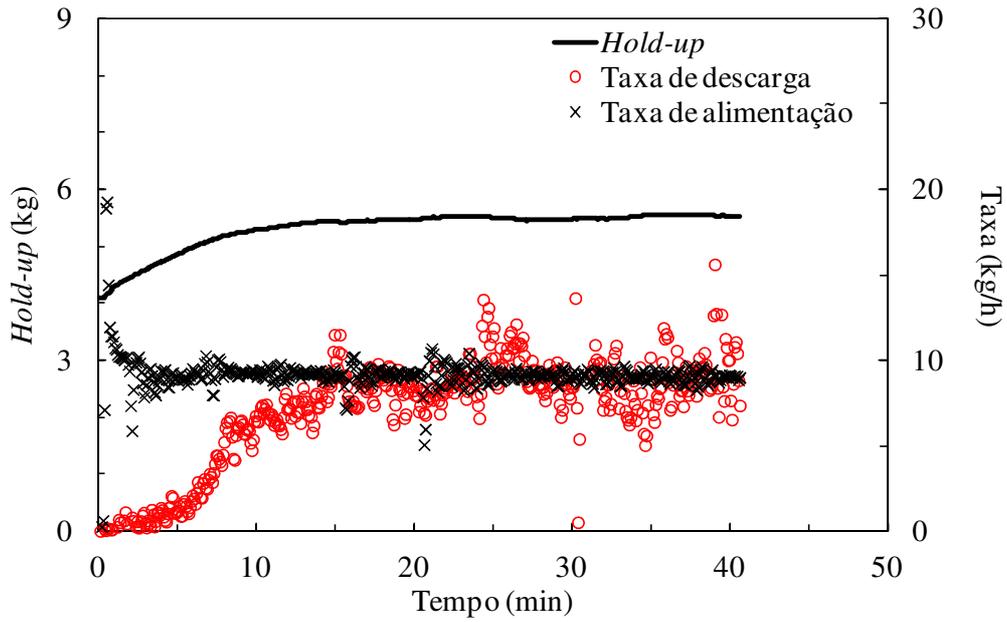


Figura VII-14 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 9 \text{ kg/h}$
 ($41 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$.

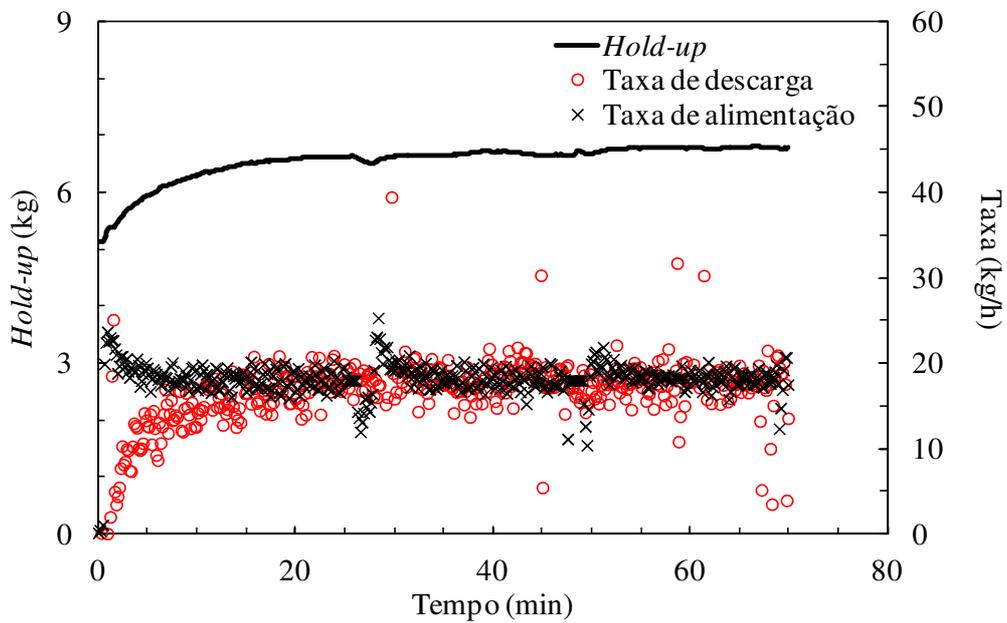


Figura VII-15 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18 \text{ kg/h}$
 ($82 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$.

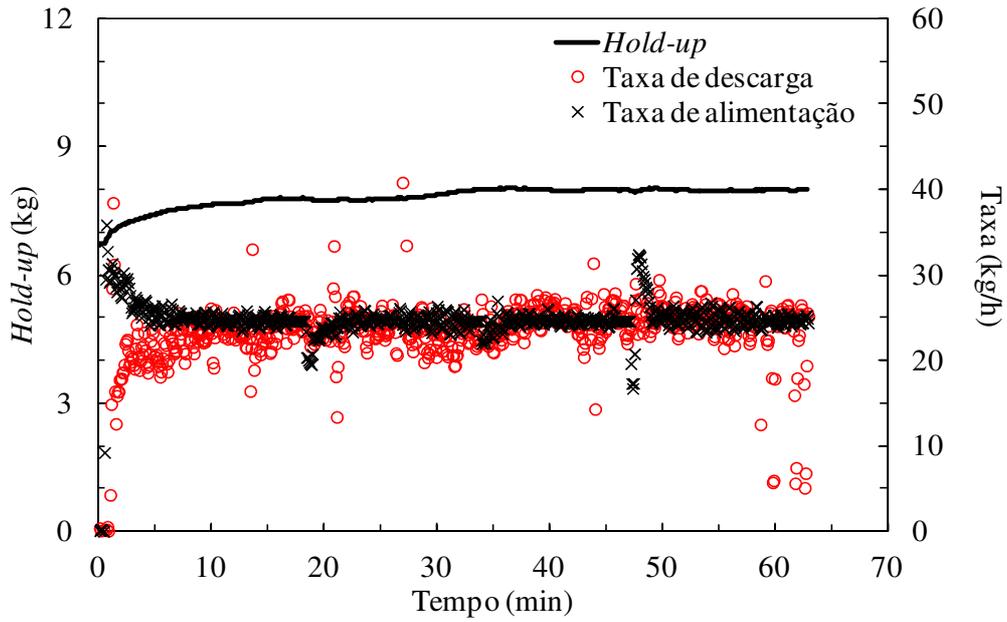


Figura VII-16 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 24,6$ kg/h
(113 cm³/min), $J = 0,20$ e $\varphi_c = 0,75$.

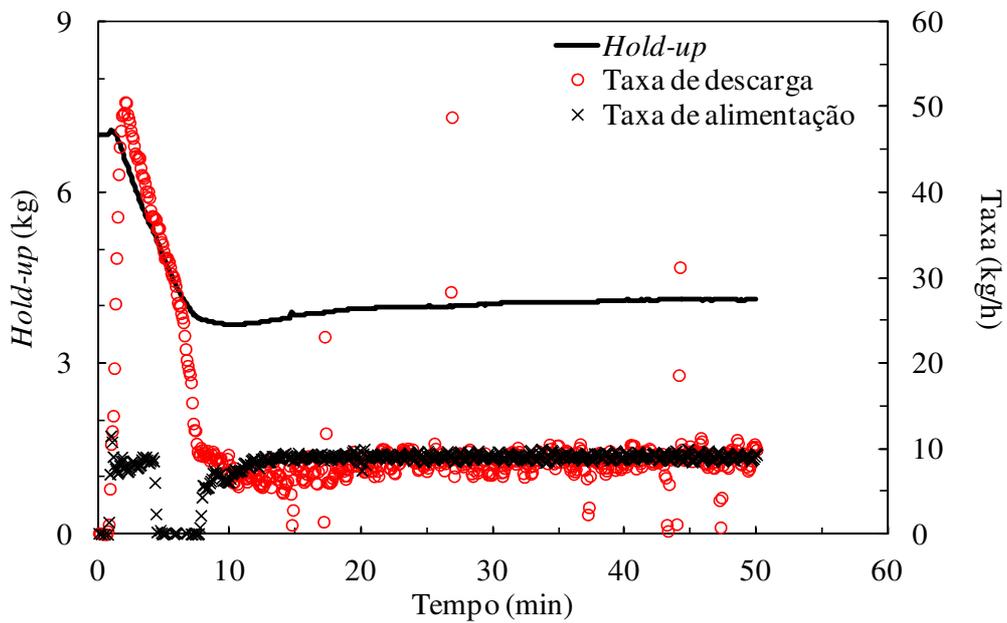


Figura VII-17 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 9$ kg/h
(41 cm³/min), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$.

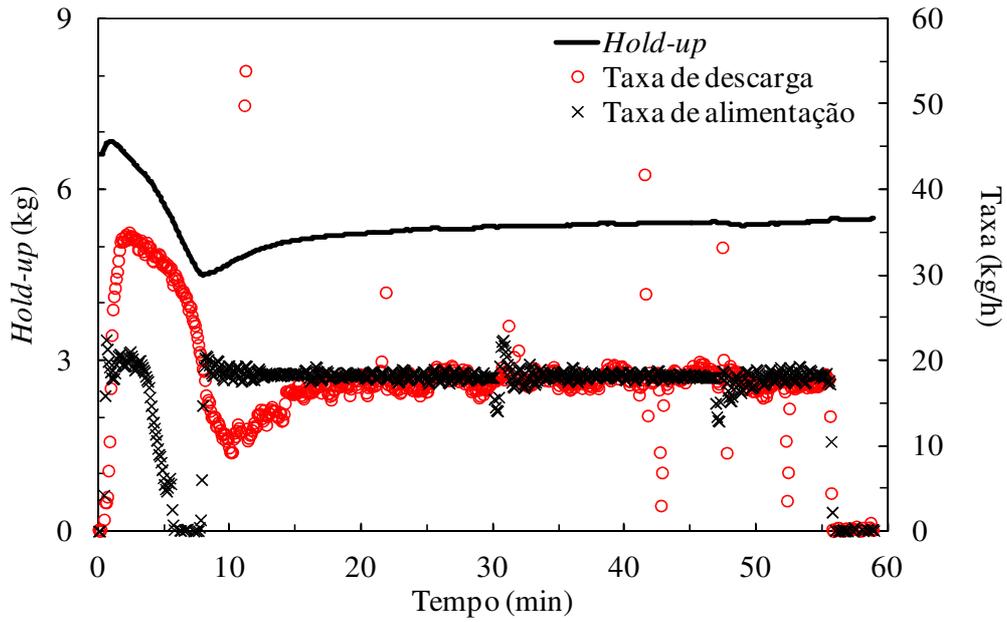


Figura VII-18 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18$ kg/h
 ($82 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$.

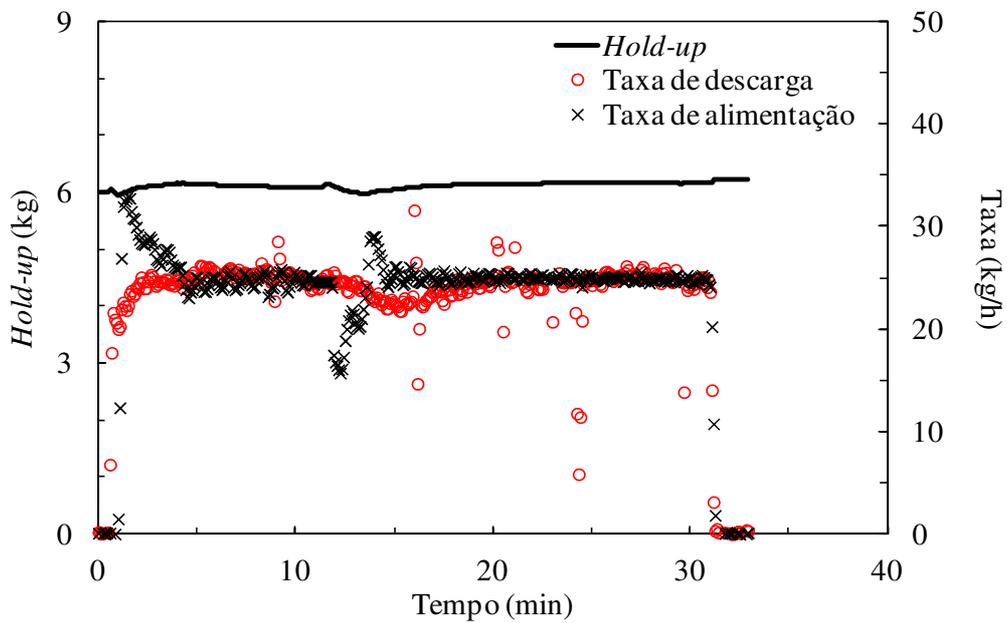


Figura VII-19 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 24,6$ kg/h
 ($113 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,30$.

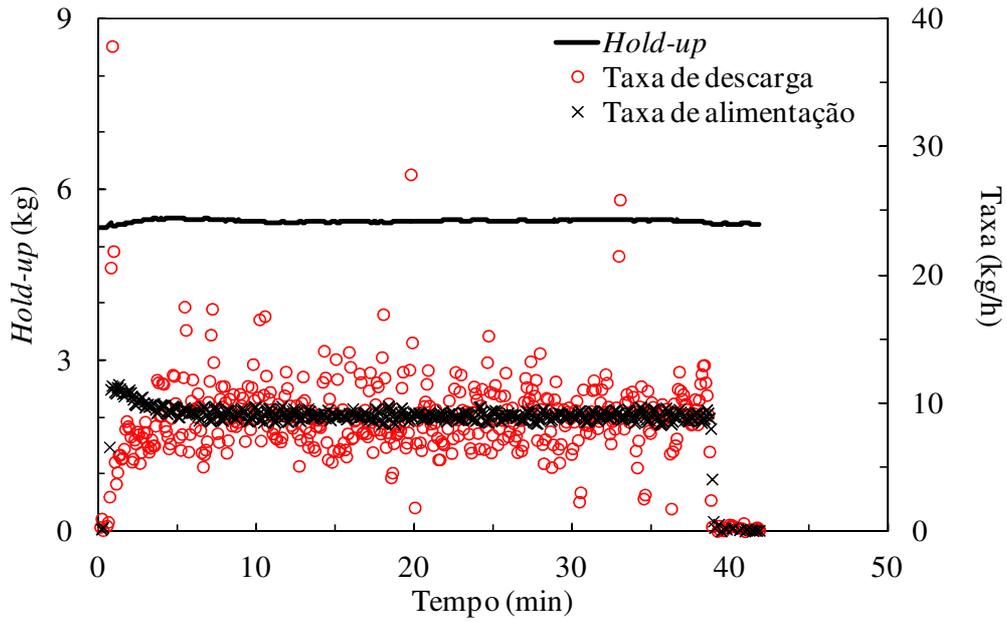


Figura VII-20 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 9$ kg/h
 ($41 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$.

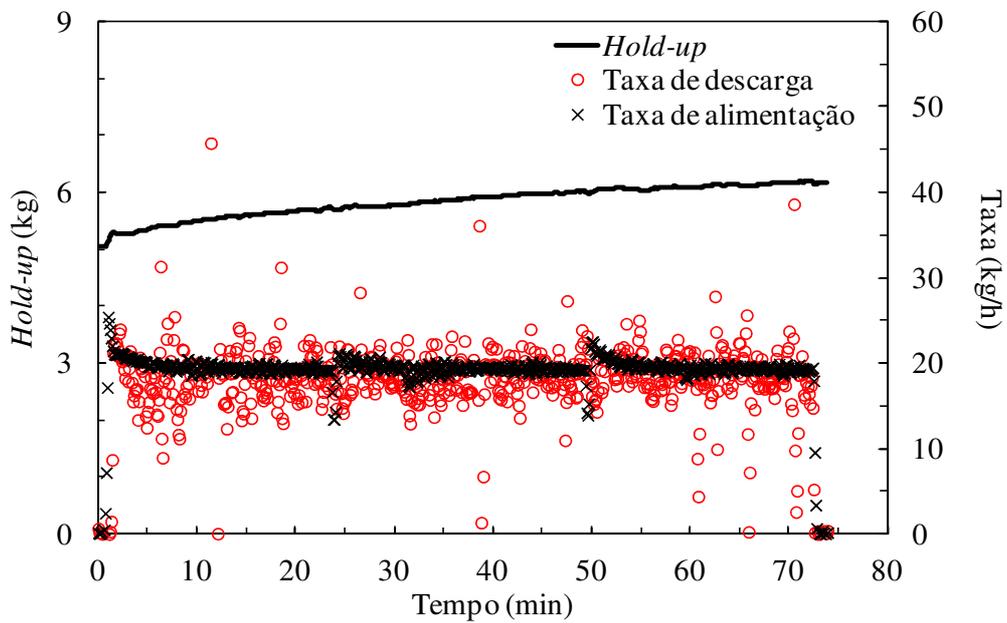


Figura VII-21 – Dados de *hold-up*, taxa de alimentação e de descarga para Itabirito: $W_{in} = 18$ kg/h
 ($82 \text{ cm}^3/\text{min}$), $J = 0,30$ e $\varphi_c = 0,75$.